ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 422, № 5, с. 608–611

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517+532+533.2

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ В АВАРИЙНОМ РЕАКТОРЕ В ПРОЦЕССЕ ЕГО ПЕРЕГРЕВА

© 2008 г. И. А. Молотков

Представлено академиком В.П. Масловым 05.05.2008 г.

Поступило 05.05.2008 г.

Из различных моделей эволюции активной зоны реактора лишь модель фильтрационного охлаждения оказалась адекватной реальности, см. [1]. Это модель фильтрации газа через саморазогревающуюся пористую среду в поле силы тяжести, она позволила объяснить, почему обломки тепловыделяющих элементов не прожгли основание реактора.

Для описания общего состояния аварийного реактора В.П. Масловым введены два важных критических значения M_* (в [1]) и M_{**} (в [2]) параметра M, характеризующего уровень распределения $Q(x, y, z)$ источников тепла

$$Q(x, y, z) = M^2 q(x, y, z), \quad \int_V q(x, y, z) dV = 1, \quad (1)$$

где V – объем реактора. Критическое значение $M = M_*$ является точкой смены режима – перехода от теплового равновесия к локальному тепловому перегреву. $M = M_{**}$ – вторая критическая константа, при $M = M_{**}$ происходит значительное нарастание температуры в реакторе и возникает ситуация глобального перегрева системы.

В работе [3] получена аналитическая оценка критической константы M_* в трехмерном случае. Ближайшая цель далее состоит в аналитической оценке критической константы M_{**}. При $M > M_{**}$ реактор входит в опаснейшее состояние глобального перегрева. Наша цель также состоит в исследовании локализации тепловой энергии при больших значениях параметра M.

2. Формулируем изучаемую модельную задачу. Объем V реактора ограничен некоторой сложной боковой поверхностью S, дном $z = 0$ и крышкой $z = H$. Рассматривается трехмерное течение газа в пористой и слабо проводящей среде, заполняющей объем V.

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской Академии наук, Троицк Московской обл.

В связи с формулировкой уравнений возникает вопрос о корректности использования фильтрационной модели Дарси. Описанные в [1] эксперименты на физических образцах и прямые измерения температуры над поверхностью завала установили отсутствие внутри завала каналов с большой величиной потока газа. Тем самым оправдана возможность описания рассматриваемого процесса фильтрации с помощью модели Дарси.

Далее предполагается проведенным стандартный переход к безразмерным физическим характеристикам среды введением отношений величин к их масштабным значениям. В итоге движение газа в завале описывается уравнением Дарси

$$\operatorname{grad} P = -\frac{1}{T}\vec{e}_z - \lambda\vec{v}, \quad \lambda = \frac{\beta}{k}, \quad (2)$$

уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{v}}{T}\right) = 0, \quad (3)$$

уравнением энергии

$$(\vec{v}, \operatorname{grad} \ln T) - \varepsilon\Delta T = M^2 q, \quad (4)$$

в котором $\varepsilon \ll 1$, и уравнением состояния

$$P = \rho T. \quad (5)$$

Уравнения (2)–(5) определяют соотношения между безразмерными величинами. Здесь T, P, ρ и $\vec{v}$ – температура, давление, плотность и скорость фильтрации газа. Малая величина безразмерного параметра ε связана с малостью коэффициента теплопроводности газа в завале. Дифференциальные операторы div, grad и оператор Лапласа в (2)–(4) трехмерные. Величины $\lambda = \frac{\beta}{k}$ и распределение источников тепла Q считаются заданными.

Уравнение энергии (4) записано в предположениях, что диссипативная функция системы мала и что можно пренебречь зависимостью теплопроводности от температуры. Энтропия в этом уравнении выражена через $\ln T$. Уравнения движения (2)–(4) моделируют динамику температуры, давления и конвективных газовых потоков под крышкой аварийного реактора. Предполагаем, что в процессе фильтрации источники тепла не перемещаются, химические реакции и плавление веществ в объеме V не происходят.

Граничные условия на дне и крышке реактора имеют вид

$$v_z = \begin{cases} \alpha(P_{\text{at}}^{+} - P), & z = 0, \\ \alpha(P - P_{\text{at}}^{-}), & z = H. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь α – коэффициент проводимости, $P_{\text{at}}^{\pm}$ – значения атмосферного давления на дне и крышке. Очевидно, что

$$P_{\text{at}}^{+} - P_{\text{at}}^{-} = \bar{\rho} H, \tag{7}$$

где $\bar{\rho}$ – средняя плотность среды завала. Температура на дне предполагается постоянной:

$$T|_{z=0} = T_0, \tag{8}$$

а условие на крышке

$$\varepsilon_0 \frac{\partial T}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 0, \quad \varepsilon_0 \ll 1 \tag{9}$$

вследствие малости теплопроводности воздуха ε_0 приближенно всегда выполнено. Через имеющиеся в дне реактора технологические отверстия поступает атмосферный воздух и поддерживает постоянную температуру на дне, что соответствует граничному условию (8). На боковой поверхности S имеют место условие непрерывности потоков тепла и условие непротекания для нормальной составляющей скорости $\vec{v}$.

Задачу (2)–(5) сводим к системе двух уравнений. Используя равенства (2) и (5), исключаем из системы уравнений скорость фильтрации $\vec{v}$ и плотность ρ. Естественно предположить, что коэффициент проницаемости k изменяется существенно медленнее, чем основные величины T и P. Получаем систему двух уравнений относительно температуры газа T и давления P:

$$\begin{gathered} \frac{1}{T}(\operatorname{grad} P, \operatorname{grad} T) - \Delta P + \frac{2P}{T^2}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \\ (\operatorname{grad} P, \operatorname{grad} T) + \frac{P}{T}\frac{\partial T}{\partial z} + \lambda\varepsilon T \Delta T = -M^2 \lambda q T. \end{gathered} \tag{10}$$

Из этих двух уравнений исключаем скалярное произведение градиентов давления и температуры и находим, что

$$\Delta P + \varepsilon\lambda\Delta T - \frac{P}{T^2}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{T}\frac{\partial P}{\partial z} + \lambda M^2 q = 0. \tag{11}$$

Граничные условия на дне и крышке реактора теперь имеют вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{P}{T} - \lambda\alpha P|_{z=0} = -\lambda\alpha P_{\text{at}}^{+}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{P}{T} + \lambda\alpha P|_{z=H} = \lambda\alpha P_{\text{at}}^{-}. \end{gathered} \tag{12}$$

Остальные граничные условия для величин T и P сводятся к (8) и (9), а условия на боковой поверхности S принимают вид

$$\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{P}{T}(\vec{e}_z, \vec{n})|_S = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_S = 0. \tag{13}$$

Роль условий на S существенно зависит от наличия “карманов” в боковой стенке. Влияние карманов в реакторе было исследовано в [3]. Результат следующий: в трехмерном случае карманы либо не меняют величину критической константы, либо незначительно уменьшают ее.

3. Далее рассматриваем ситуацию, когда реактор близок к состоянию перегрева. Если температура T достаточно велика, то в (11) можно пренебречь членом $\frac{P}{T}\frac{\partial T}{\partial z}$. Тогда вместо (11) получаем

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} P) + \lambda\varepsilon\Delta T = -M^2\lambda q. \tag{14}$$

В то же время при больших значениях параметра M уже нельзя пренебрегать слагаемым $\lambda\varepsilon\Delta T$ в (14). Это означает, что температура в этом случае имеет порядок

$$T \sim \frac{\tau}{\varepsilon}, \tag{15}$$

τ конечно.

Уточним поведение температуры и давления в рассматриваемом высокотемпературном случае. В соответствии с (15) ищем решение этих уравнений в виде

$$T = \frac{\tau}{\varepsilon} + O(1), \quad P = p + O(\varepsilon), \tag{16}$$

что приводит к системе уравнений

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\tau}\operatorname{grad} p\right) = 0, \tag{17}$$

$$\Delta(p + \lambda\tau) + \lambda q M^2 = 0. \tag{18}$$

Граничные условия для τ и p приобретают вид

$$\tau|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \lambda\alpha p|_{z=0} = -\lambda\alpha P_{\text{at}}^{+}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \lambda\alpha p|_{z=H} = \lambda\alpha P_{\text{at}}^{-}, \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial \tau}{\partial n}\right|_S = 0. \tag{21}$$

При $M \gg M_{**}$ температура делается еще более высокой. Член в (18), содержащий давление, является при этом несущественным. Для распределения температуры получаем уравнение Пуассона

$$\Delta\tau = M^2 q. \tag{22}$$

Чтобы получить оценку для M_{**}, интегрируем уравнения (17) и (18) по всему объему V реактора с применением формулы Гаусса–Остроградского. Интегрирование (17) после использования граничных условий дает соотношение $p|_{z=0} = P^+_{\mathrm{at}}$. Интегрирование уравнения (18) приводит к равенству

$$\int_S \left(\frac{\partial p}{\partial n} + \lambda\frac{\partial \tau}{\partial n}\right)dS + \int_{S_t}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)dxdy +$$

$$+ \int_{S_b}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)dx\, dy = -\lambda M^2, \tag{23}$$

в котором S_t и S_b – соответственно крышка и дно реактора. Интегралы по S_b и по S_t учитывают взаимодействие завала с внешней средой через дно и крышку, интеграл по S – через боковую поверхность. Интеграл по боковой поверхности в (23) исчезает за счет граничного условия (21). Вычислим p и $\frac{\partial \tau}{\partial z}$ на дне и крышке реактора. В окрестности дна ищем τ и p в виде отрезков рядов Тейлора

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 z + \ldots, \quad p = p_0 + p_1 z + \ldots \tag{24}$$

В силу (19) $\tau_0 = 0$. Величины τ_1, p_0 и p_1 могут зависеть от горизонтальных переменных (x, y). Подстановка (24) в (17) и (18) с последующим приравниванием коэффициентов при z^0 и при z^1 приводят к системе уравнений относительно функций $p_0(x, y)$ и $\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)_0$. Исследование этой системы позволяет установить, что p_0 и $\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)_0$ не зависят от x и y, причем

$$p_0 = \mathrm{const}, \quad \left.\frac{\partial \tau}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \tag{25}$$

и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

Использование отрезков рядов по степеням $H - z$, аналогичных (24), позволяет провести такие же вычисления в окрестности крышки и установить, что $\left.\frac{\partial \tau}{\partial z}\right|_{z=H} = 0$.

Заметим, что применение разложений типа (24) дает возможность получать оценки изучаемых величин не только при $z \to 0$, но и при малых, но конечных значениях z (см. [4, гл. 6]).

Собирая все данные по температуре и давлению на дне и крышке, находим, что

$$M^2_{**} = \alpha\bar{\rho}H\Sigma, \tag{26}$$

где Σ – площадь крышки реактора. Если приближенно положить произведение $H\Sigma$ равным объему реактора, то итоговая формула для M_{**} принимает вид

$$M^2_{**} \cong \alpha\Pi, \tag{27}$$

где Π – масса всего реактора вместе с завалом.

Отметим, что распределение температуры, отвечающее значению $M = M_{**}$, в соответствии с (22) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\tau + M^2_{**}q = 0. \tag{28}$$

4. Обозначим левые части уравнений (17) и (18) через F и G и найдем условие ветвления (бифуркации), при котором нарушается однозначная разрешимость этой системы уравнений относительно величин τ и p. Искомое условие имеет вид равенства нулю якобиана

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial \tau}. \tag{29}$$

Здесь $\frac{\partial F}{\partial \tau}$, $\frac{\partial G}{\partial p}$, …. – производные отображений F и G. Вычисляем эти производные:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = -\frac{1}{\tau^2}(\mathrm{grad}\,p, \mathrm{grad}\,\tau) + \varepsilon\left(\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{4p}{\tau^3}\frac{\partial \tau}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \varepsilon\frac{2}{\tau^2}\frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad \frac{\partial G}{\partial \tau} = \varepsilon\left(\frac{2p}{\tau^3}\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{1}{\tau^2}\frac{\partial p}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial G}{\partial p} = -\frac{\varepsilon}{\tau^2}\frac{\partial \tau}{\partial z}.$$

Подставляем эти выражения в (29). Получаем, что якобиан (29) равен нулю при

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0. \tag{30}$$

Горизонтальный уровень $z = z_1$ в реакторе, для которого выполнено условие (30), характеризуется экстремальной температурой

$$\tau = \tau_1(x, y). \tag{31}$$

Условия (30) и (31) как раз и определяют ветвление (бифуркацию).

В окрестности линии ветвления (31) поведение температуры и давления описывается разложениями

$$\tau = \tau_1 + \left(\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}\right)_{z_1}\frac{(z-z_1)^2}{2} + \ldots, \qquad (32)$$

$$p = p_1 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z_1}(z-z_1) + \ldots, \quad p_1 = p|_{z=z_1}. \qquad (33)$$

Подставляем (32) и (33) в исходные уравнения (17) и (18) и разлагаем входящие в уравнения величины в ряд в окрестности $z = z_1$. Получаем условия, которым удовлетворяют τ и p в окрестности линии ветвления:

$$(\operatorname{grad} p, \operatorname{grad}\tau) = 0, \quad \Delta p = 0, \qquad (34)$$

$$\Delta\tau + M^2 q = 0. \qquad (35)$$

При $\tau \to \tau_1$ уравнение (35) превращается в уравнение

$$\Delta\tau_1 + M_b^2 q = 0, \qquad (36)$$

определяющее значение M_b параметра M, отвечающее точке бифуркации. Уравнения (28) и (36) совершенно идентичны, граничные условия к ним полностью совпадают. Отсюда следует, что

$$M_{**} = M_b, \qquad (37)$$

т.е. эти два значения параметра M равны.

5. Рассмотрим вертикальное изменение температуры при значениях $M \sim M_{**}$. На дне реактора температура равна $\tau_0 = \varepsilon T_0$. При увеличении z температура возрастает, поскольку остатки тепловыделяющих источников нагревают лишь те слои завала, которые расположены выше этих источников. На уровне ветвления $z = z_1$ достигается максимум температуры.

Уточним поведение температуры в окрестности этого максимума, для этого вычислим вторую производную в разложении (32). Интегрируем уравнение (35) по бесконечно тонкому слою $z_1 \le z \le z_1 + \delta$. Как и в предыдущем разделе, применяем формулу Гаусса–Остроградского и учитываем равенства (21), (30). Оставшиеся после этого слагаемые после сокращения на δ дают, что $\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}\right)_{z_1} = -M^2 q_1$.

В результате получаем формулу для температуры в окрестности уровня ветвления

$$\tau = \tau_1 - M^2 q_1\frac{(z-z_1)^2}{2}, \quad q_1 = q|_{z=z_1}. \qquad (38)$$

Дифференцируя (35) по z, устанавливаем, что наряду с равенством (30) справедливо равенство

$$\left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z=z_1} = 0. \qquad (39)$$

Это означает, что температурный максимум возникает не на произвольном горизонтальном уровне внутри завала, а на том уровне, где имеется максимальная концентрация источников тепла. В соответствии с (38) и (39) наиболее высокая температура и наибольшая плотность тепловых источников внутри реактора сосредоточены в окрестности уровня $z = z_1$ в тонком слое толщиной

$$h = \left[\frac{\tau_1 q_1}{2M^2}\right]^{1/2}. \qquad (40)$$

Слой (40) таков, что температура спадает в два раза к его краям. Малая величина толщины h обусловлена большой величиной M. Концентрация тепловой энергии в слое (40) указывает на конкретный механизм перегрева в реакторе, состоящий в сосредоточении энергии вблизи уровня бифуркации $z = z_1$. При этом сам уровень бифуркации формируется именно там, где максимальна плотность тепловыделения. Одновременно при $M = M_b$ качественно изменяется процесс передачи тепла: конвекция заменяется молекулярной теплопроводностью. Это изменение подтверждается тем, что определяемый уравнением Дарси конвекционный поток в силу уравнений (34) обращается в нуль.

Автор благодарен академику В.П. Маслову за важные обсуждения и замечания в связи с работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маслов В.П., Мясников В.П., Данилов В.Г.* Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1987.
2. *Маслов В.П.* // ДАН. 1992. Т. 326. № 2. С. 246–250.
3. *Маслов В.П.* Молотков И.А. // ДАН. 2007. Т. 415. № 4. С. 475–477.
4. *Молотков И.А.* Аналитические методы в теории нелинейных волн. М.: Физматлит, 2003.