

УДК 534.222

## ГИСТЕРЕЗИС В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ВЯЗКОСТЬЮ

© 2008 г. И. А. Молотков

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН  
142190 г. Троицк Московской области

E-mail: imolotkov@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 14.12.07 г.

Изучены волны нагрузки и разгрузки в нелинейной релаксирующей и диссипативной среде типа уплотняемого грунта. Для построения решений, описывающих волны в такой среде, использованы метод Стокса и малодистантный асимптотический метод. Получены явные приближенные решения при различных значениях параметров релаксации и вязкости. Описано влияние типа среды на вид гистерезисных кривых.

PACS: 43.25.Dc; 43.35.Fj

### ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные волновые процессы, в том числе с гистерезисной нелинейностью, широко обсуждаются в литературе. Отметим статьи [1, 2] и большой обзор [3], а также процитированные в этих публикациях работы.

В связи с современными задачами строительства особенно важно развитие теории распространения нелинейных акустических волн в средах с необратимыми деформациями типа уплотняемого грунта. Такая теория при анализе процесса распространения требует одновременного учета нелинейной релаксации и вязкости среды. Решение задачи с одновременным учетом указанных эффектов является весьма сложной проблемой, ее анализ был начат, хотя и не завершен в [4].

В этой статье продолжаем работу [4] и рассматриваем упрощенную модель, в которой релаксирующей является лишь волна разгрузки. Для такого процесса в [4] было получено уравнение

$$(P_z - PP_\theta)_\theta + \kappa[P_z - P_m(z)P_\theta] = 0 \quad (1)$$

в безразмерных переменных,  $P$ ,  $z$  и  $\theta$  – безразмерные давление, расстояние и время,  $P_m(z)$  – безразмерное максимальное давление. Значки  $z$  и  $\theta$  означают дифференцирование по соответствующим переменным. Безразмерный коэффициент  $\kappa$  в (1) учитывает релаксацию, при  $\kappa \ll 1$  время релаксации велико. Этот случай и рассматривается далее. При этом условии уравнение (1) может быть упрощено:

$$P_z - PP_\infty = -\frac{1}{2}\kappa[P^2 - 2P_m(z)] + O(\kappa^2). \quad (2)$$

Для описания процесса разгрузки – процесса со спадающим во времени давлением при

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} < 0 \quad (3)$$

– необходимо решить уравнения (1) или (2) при произвольной функции  $P_m(z)$ . Полученные решения нужно сшить в точке  $P = P_m(z)$ ,  $\theta = \theta_m(z)$  с решением, описывающим волну нагрузки, и определить функции  $P_m(z)$  и  $\theta_m(z)$ .

Нелинейные уравнения (1) и (2) весьма сложны для решения. Особая трудность связана с тем, что функция  $P_m(z)$  здесь заранее не известна и является искомой. Другая трудность в том, что на решение для разгрузки заранее накладывается требование (3). В дальнейшем для приближенного решения нелинейных уравнений используем два асимптотических подхода.

Первый из этих подходов (см. [5]) позволяет изучать процессы лишь на сравнительно коротких трассах или небольших промежутках времени, зато дает возможность преодолеть многие аналитические трудности. Решения ищутся в виде полиномов по степеням расстояния или времени. Обычные приемы работы с асимптотическими разложениями дают возможность найти размеры предельных дистанций или интервалов, на которых упомянутые полиномы могут быть использованы для оценки физических эффектов.

Второй подход – метод малоамплитудного приближения (см. [6]), впервые был предложен Дж. Стоксом. Решения строятся в виде разложений по степеням малого параметра, пропорционального амплитуде. При этом подходе также могут быть установлены условия его применимости.

Решению уравнений (1) и (2) с помощью указанных методов как раз и посвящено начало работы. Здесь показано, что эти подходы определяют решение на разных интервалах времени  $\theta$  и взаимно дополняют друг друга.

Далее, во второй половине работы изучаются решения более общего уравнения

$$(P_z - PP_\theta - \Gamma P_{\theta\theta})_\theta + \kappa(P_z - P_m(z)P_\theta) = 0, \quad (4)$$

учитывающего вязкость (поглощение) среды  $\Gamma$ . Для решения этого уравнения используется точное решение уравнения (4) при  $\kappa = 0$ , а также решения, близкие к автомоделным.

Наконец, в последнем пункте работы производится сопоставление гистерезисных кривых при различных значениях параметров  $\kappa$  и  $\Gamma$ .

### ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ПО $\theta$ РЕШЕНИЕ.

Начинаем с решения для волны разгрузки. В невозмущенном случае (при  $\kappa = 0$ ) имеется точное решение

$$P = -\frac{\theta}{z-A}, \quad z > A.$$

Для этого решения, очевидно, выполнено условие (3). Решение возмущенного уравнения (2), в соответствии со сказанным выше, ищем в виде разложения по степеням  $\theta$

$$P = -\frac{\theta}{z-A} + \kappa[\theta P_1(z) + \theta^2 P_2(z)] + O(\kappa\theta^3),$$

в котором функции  $P_1(z)$  и  $P_2(z)$  подлежат определению.

Стандартное приравнивание коэффициентов при различных степенях  $\theta$  приводит к определению  $P_1(z)$  и  $P_2(z)$ . Для волны разгрузки получаем:

$$P = -\frac{\theta}{z-A} - \frac{\kappa\theta}{(z-A)^2} \int P_m(z)(z-A) dz - \frac{\kappa\theta^2}{4}(z-A). \quad (5)$$

Для приближения (5) можно указать условие применимости. Оценивая дальнейшие, не выписанные в (5), члены разложения по степеням  $\theta$  и полагая, что  $A < z < B$ , можно вывести следующее условие применимости

$$\theta < \frac{1}{(B-A)(z-A)^5} \quad (6)$$

для явной формулы (5).

Для волны нагрузки, как было условлено, не учитываем эффект релаксации. Здесь справедливо точное решение

$$P = \frac{\theta}{B-z}, \quad A < z < B. \quad (7)$$

Сшиваем решения (5) и (7) в точке  $P = P_m(z)$ ,  $\theta = \theta_m(z)$ . Исключаем функцию  $P_m(z)$  и используем равенство

$$P_m(z)(z-A) = -\theta_m(z) + O(\kappa),$$

являющееся следствием (5). Приходим к линейному дифференциальному уравнению

$$\theta_m(z) - \frac{4}{z-A} \int \theta_m(z) dz = -\frac{4}{\kappa} \frac{B-A}{(B-z)(z-A)^7},$$

определяющему функцию  $\theta_m(z)$ :

$$\theta_m(z) = -\frac{4(B-A)}{\kappa} \frac{1}{(B-z)(z-A)^2} - \frac{16(B-A)}{\kappa} (z-A)^3 \int \frac{dz}{(B-z)(z-A)^7}. \quad (8)$$

Формула (8) и соответствующая ей формула для  $P_m(z)$  весьма громоздки. Будем считать рассматриваемый интервал  $[A, B]$  достаточно широким, а координату  $z$  близкой к левому краю интервала

$$z-A \ll B-A. \quad (9)$$

Условие (9) позволяет приближенно вычислить интеграл в (8) и получить явные и конечные выражения для  $\theta_m$  и  $P_m$ :

$$\begin{aligned} \kappa\theta_m &= B-A \left[ 1 - \frac{4}{3(z-A)^3(B-A)} + O[(B-A)^{-3}] \right], \\ \kappa P_m &= 1 - \frac{4}{3(z-A)^3(B-A)} + O[(B-A)^{-3}]. \end{aligned} \quad (10)$$

Если из полученных формул исключить  $z-A$ , то приходим к граничной кривой, связывающей точки максимальной нагрузки при различных значениях  $z$ . В старшем порядке такая кривая имеет вид

$$P_m = \frac{1}{B-A} \theta_m + O[(B-A)^{-3}]. \quad (11)$$

На рис. 1 изображены линии нагрузки и разгрузки при двух значениях  $z = z_1$  и  $z = z_2$ , а также граничная кривая (11). Согласно (7) при  $z_2 > z_1$  линия нагрузки, соответствующая  $z = z_2$ , проходит выше такой же линии, соответствующей  $z = z_1$ . В соответствии с (5) линия разгрузки при  $z = z_1$  уходит вниз более круто, чем при  $z = z_2$ .

Полученные в этом пункте формулы справедливы при выполнении условий (6) и (9).

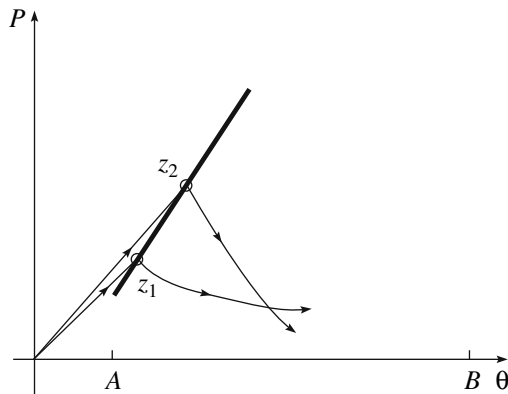


Рис. 1. Линии нагрузки и разгрузки при  $z_1 < z_2$  и сравнительно малых временах, условие (6). Сплошная жирная линия – граничная кривая.

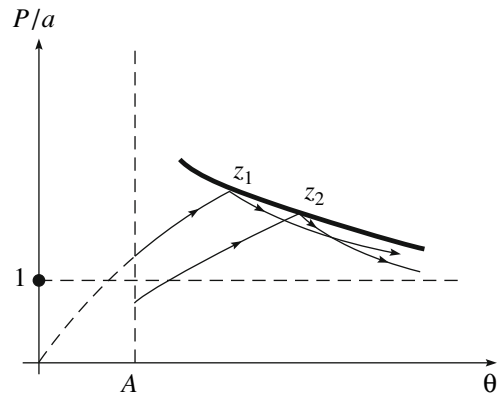


Рис. 2. Линии нагрузки и разгрузки при  $z_1 < z_2$  и сравнительно больших временах, условия (14), (15). Сплошная жирная линия – граничная кривая.

МАЛОАМПЛИТУДНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Теперь уравнение (2) решаем другим методом – с помощью малоамплитудного анзаца Стокса

$$P = au(\theta, z) + a^2v(\theta, z) + a^3w(\theta, z) + O(a^4), \quad (12)$$

$$a \ll 1.$$

Здесь  $u, v, w$  – неизвестные функции. Подставляем это разложение в уравнение (2). Самое старшее получающееся уравнение устанавливает, что функция  $u = u(\theta)$  не зависит от  $z$ .

Для волны разгрузки должны быть выполнены условия

$$1) u(0) = 0 \text{ и } 2) u'(\theta) < 0.$$

Условие 1) означает обращение  $P$  в нуль одновременно с  $\theta$ . Неравенство 2) обеспечивает выполнение условия (3). Для выполнения этих требований положим

$$u = \frac{\theta}{\theta - A}, \quad A > 0.$$

Далее считаем, что параметры  $a$  и  $k$  – величины одного порядка малости и что  $P_m = aQ_m$ . Продолжая процесс определения членов разложения (12), находим, что

$$P = \frac{a\theta}{\theta - A} - \frac{a^2A\theta}{(\theta - A)^3}z + a^2w(\theta, z) + O(a^3). \quad (13)$$

Конечно, построенные формулы относятся к случаю, когда

$$\theta > A > 0. \quad (14)$$

Условие применимости формулы (13) (аналогичное условию (6)) имеет вид

$$\theta - A > \sqrt{aAz}. \quad (15)$$

Для волны нагрузки выбираем  $U = \theta/(\theta + B), B > 0$ , что обеспечивает неравенство  $\partial P/\partial \theta > 0$ . Теперь вычисления приводят к формуле

$$P = \frac{a\theta}{\theta + B} + \frac{a^2B\theta z}{(\theta + B)^3} + O(a^3). \quad (16)$$

Сшивание формул (13) и (16) при  $P = P_m$  и  $\theta = \theta_m$  ведет к исключению функции  $P_m(z)$ . Получаем уравнение для разности  $\tau = \theta_m(z) - A$ :

$$-\frac{A+B}{(A+B+\tau)\tau} + \frac{aBz}{(A+B+\tau)^3} + \frac{aAz}{\tau^3} =$$

$$= a^2 \left[ -\frac{kz(\tau+A)}{2\tau^2} + \frac{k}{\tau} \left( z + A \int \frac{dz}{\tau} \right) + \frac{z^2 A(\tau+2A)}{\tau^5} \right].$$

В этом уравнении имеется малый параметр  $a$  и большой параметр  $A+B$ . В результате асимптотических вычислений находим, что в старшем порядке

$$\theta_m(z) = A - \frac{az}{2} + O(a^{3/2}). \quad (17)$$

Использование формул (17) и (16) позволяет выписать явный вид  $P_m(z)$ . Из (13) следует, что граничная кривая (аналогичная кривой (11)) приближенно описывается уравнением

$$P_m = a \frac{\theta_m}{\theta_m - A}, \quad \theta_m > A. \quad (18)$$

Линии нагрузки и разгрузки, а также граничная кривая (18) изображены на рис. 2.

Сопоставим полученные здесь результаты с результатами предыдущего пункта. Считаем, что в обоих случаях решения рассматриваются на одном и том же временном интервале  $A < \theta < B$ . Решение (5) для волны разгрузки относится к не слишком большим временам, см. неравенство (6), ограничивающее  $\theta$  сверху. Аналогичное, но полу-

ченное другим путем решение (13) для волны разгрузки справедливо при условии (15). Это условие ограничивает  $\theta$  снизу. Таким образом, два примененных подхода дают решения на разных частях интервала  $A < \theta < B$  и взаимно дополняют друг друга.

Как на рис. 1, так и на рис. 2 росту  $z$  отвечает увеличение  $\theta_m$ . Это означает, что при более глубоком проникновении в рассматриваемую среду достижение максимального давления  $P_m(z)$  происходит при больших временах  $\theta_m(z)$ .

### УЧЕТ ВЯЗКОСТИ

С учетом безразмерной вязкости  $\Gamma$  уравнение (1) приобретает дополнительные члены:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [P_z - PP_\theta - \Gamma P_{\theta\theta}] + \kappa [P_z - P_m(z)P_\theta - \Gamma P_{\theta\theta}] = 0. \quad (19)$$

В этом пункте будем считать, что

$$\Gamma \ll 1 \quad (20)$$

(вязкость мала). При одновременном выполнении неравенств  $\kappa \ll 1$  и (20) самым последним членом  $\kappa \Gamma P_{\theta\theta}$  в уравнении (19) естественно пренебрегать. В то же время член  $\Gamma P_{\theta\theta}$  даже при условии (20) весьма важен, так как содержит самую высокую производную в уравнении (19). Условие  $\kappa \ll 1$  позволяет переписать уравнение (19) в виде

$$P_z - PP_\theta - \Gamma P_{\theta\theta} = -\frac{\kappa}{2} [P^2 - 2P_m(z)P] + O(\kappa^2), \quad (21)$$

аналогичном (2).

В старшем порядке (при  $\kappa = 0$ ) получаем уравнение Бюргерса

$$P_z - PP_\theta - \Gamma P_{\theta\theta} = 0, \quad (22)$$

которое имеет точное решение

$$P_0 = \frac{1}{z-A} \left[ \operatorname{th} \frac{\theta}{2\Gamma(z-A)} - \theta \right] \quad (23)$$

при любых  $\Gamma$  и  $A$ .

При

$$z - A < 1/2\Gamma \quad (24)$$

выражение  $P_0$  удовлетворяет условию

$$\partial P / \partial \theta > 0 \quad (25)$$

и может быть использовано для описания волны нагрузки. При этом целесообразно ограничиваться двумя членами разложения в ряд

$$P = \frac{1}{z-A} \left[ \left( \frac{1}{2\Gamma(z-A)} - 1 \right) \theta - \frac{1}{3} \left( \frac{\theta}{2\Gamma(z-A)} \right)^3 \right]. \quad (26)$$

При другом условии

$$z - A > 1/2\Gamma \quad (27)$$

Выражение (23) для  $P_0$  удовлетворяет условию (3), т.е. может описывать волну разгрузки. Однако из-за малости  $\Gamma$  условие (27) является весьма ограничительным. Поэтому решение для разгрузки удобно строить иначе. Уравнение (22) имеет автомодельное решение

$$P = \frac{1}{\sqrt{z-A}} \Phi(y), \quad y = \frac{\theta}{\sqrt{z-A}}, \quad z > A, \quad (28)$$

а уравнение (21), соответственно, имеет решение, близкое к автомодельному. Подстановка (28) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \Gamma \Phi'' + \Phi \Phi' + \frac{1}{2} (\Phi + y \Phi') &= \\ &= \kappa \sqrt{z-A} \Phi \left( \frac{1}{2} \Phi - \sqrt{z-A} P_m \right) + O(\kappa^2). \end{aligned} \quad (29)$$

Строим решение уравнения (29) в виде разложения по степеням  $y$ . В старшем порядке для волны разгрузки получаем

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{\sqrt{z-A}} \left[ \left( \frac{\Gamma}{\kappa \sqrt{z-A}} \right)^3 - \frac{1}{2} \frac{\theta}{\sqrt{z-A}} \right] + \\ + O \left( \frac{\kappa \theta}{\sqrt{z-A}} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Сшивание выражений (26) и (30) при  $\theta = \theta_m$ ,  $P = P_m$  в старшем порядке ведет к явным формулам

$$\theta_m = 2\Gamma \left( \frac{\Gamma}{\kappa} \right)^{1/3} (z-A)^{7/6} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\Gamma}{\kappa} \right)^{2/3} (z-A)^{1/3} \right], \quad (31)$$

$$P_m = \left( \frac{\Gamma}{\kappa} \right)^{1/3} \frac{1}{(z-A)^{2/3}} \times \quad (32)$$

$$\times \left[ 1 - \Gamma (z-A)^{5/6} - \frac{1}{3} \Gamma \left( \frac{\Gamma}{\kappa} \right)^{2/3} (z-A)^{7/6} \right]$$

и вытекающему из них уравнению граничной кривой

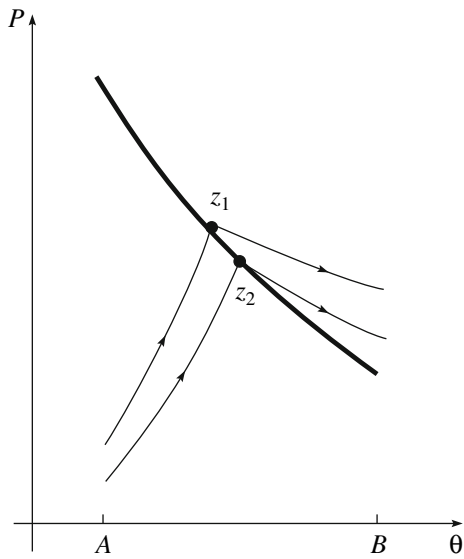
$$P_m \theta_m^{4/7} = (2\Gamma)^{4/7} \left( \frac{\Gamma}{\kappa} \right)^{11/21}. \quad (33)$$

Кривая (33) вместе с типичными линиями нагрузки – разгрузки изображена на рис. 3.

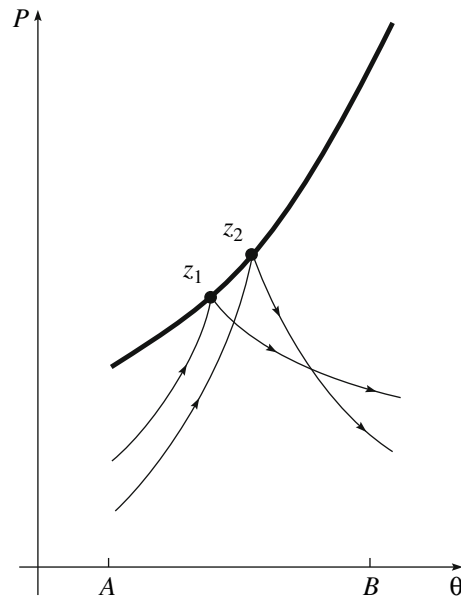
В связи с формулами (26) и (30) отметим, что вязкость  $\Gamma$  в отличие от  $\kappa$  и несмотря на условие (20) влияет уже на главные части выражений  $P_m$  и  $\theta_m$ .

### СЛУЧАЙ ЗНАЧИТЕЛЬНОЙ ВЯЗКОСТИ

Как и ранее, для описания волны разгрузки решаем уравнение (21). В отличие от предыдущего



**Рис. 3.** Линии нагрузки и разгрузки при  $z_1 < z_2$  и малой вязкости. Сплошная жирная линия – граничная кривая.



**Рис. 4.** Линии нагрузки и разгрузки при  $z_1 < z_2$  и значительной вязкости. Сплошная жирная линия – граничная кривая.

пункта считаем вязкость  $\Gamma$  значительной и применяем другие методы анализа этого уравнения. Для описания волны нагрузки используем возмущение точного решения (23) уравнения Бюргерса. Для описания волны разгрузки автомодельное решение вида (28) непригодно, так как при этом не удастся удовлетворить условию (25). Поэтому для волны разгрузки используем некоторый специальный анзац.

Итак, волну разгрузки ищем в виде

$$P = P_0 + \kappa g(\theta, z),$$

где для  $P_0$  используем представление (26). Считаем, что  $\Gamma$  велико и справедливо неравенство (27). Для функции  $g$  на основании (21) получаем линейное неоднородное уравнение

$$\Gamma g_{\theta\theta} + (P_0 g)_{\theta} = \frac{1}{2}(P_0^2 - 2P_m P_0).$$

В результате его решения и последующих вычислений получаем

$$P = P_0 + \kappa \left[ \frac{\Gamma}{3} + \frac{1}{2} P_m \theta + b \theta^2 \right], \tag{34}$$

$$b \equiv \frac{1}{6(z-A)} \left( 1 - \frac{1}{\Gamma(z-A)} \right).$$

Формула (26) для  $P_0$  показывает, что условие (3) здесь выполнено.

Для отыскания волны нагрузки применяем анзац

$$P = \frac{\theta}{B-z} + \frac{c\theta^\alpha}{(B-z)^2} \dots, \quad z > B,$$

константы  $\alpha$  и  $c$  подлежат определению. Получаем

$$P = \frac{\theta}{B-z} + \frac{1}{6\Gamma} \frac{\theta^3}{(B-z)^2} + O\left[ \frac{\theta^5}{(B-z)^3} \right]. \tag{35}$$

Переменная  $z$ , как и в (7), принадлежит интервалу  $[A, B]$ .

Сшивание выражений (34) и (35) дает явные формулы

$$\theta_m^2 = \frac{2\Gamma(A+B)(B-z)^2}{z-A}, \tag{36}$$

$$P_m^2 = \frac{2\Gamma(A+B)}{z-A}. \tag{37}$$

Граничная кривая определяется приближенным уравнением

$$P_m = \frac{\theta_m}{B-A} + \frac{3(A+B)}{\kappa\Gamma(B-A)^3} \theta_m^2$$

и изображена на рис. 4.

Сопоставляя формулы (31), (32) (малые  $\Gamma$ ) с формулами (36), (37) (значительные  $\Gamma$ ), видим, что с ростом вязкости главные части выражений  $P_m$  и  $\theta_m$  перестают зависеть от коэффициента релаксации.

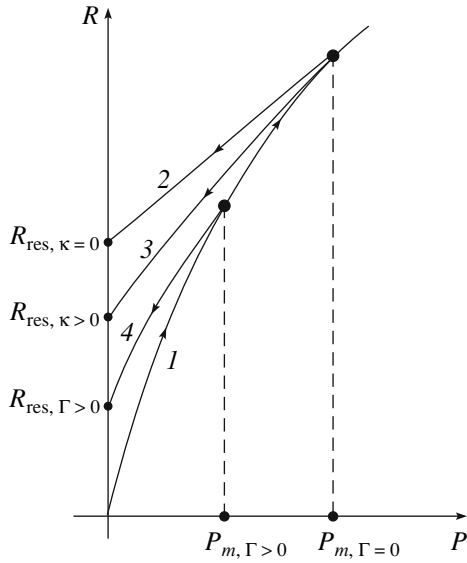


Рис. 5. Зависимость плотности от давления при нагрузке и различных вариантах разгрузки: 1 – процесс нагрузки без релаксации, 2 – процесс разгрузки без релаксации, 3 – процесс разгрузки при  $0 < \kappa \leq 1$ , формулы (5) и (12), 4 – процесс разгрузки при  $\Gamma > 0$ , формула (24).

### ЗАВИСИМОСТЬ ПЛОТНОСТИ ОТ ДАВЛЕНИЯ. ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ КРИВЫЕ

Используем безразмерные плотность, давление

$$R = \frac{\rho'}{\rho_1}, \quad P = \frac{p'}{p_1}$$

и безразмерный параметр  $\chi = p'_0 / \rho_1 c_1^2$ . Здесь  $\rho'$ ,  $p'$  – размерные плотность и давление,  $\rho_1$ ,  $p_1$ ,  $c_1$  – значения плотности, давления и скорости звука до деформации. Определяющему уравнению (14, [4]) из работы [4] можно придать вид

$$R = \chi P - \epsilon \chi^2 P^2 + \frac{\epsilon \chi^2}{T_R}, \quad (38)$$

$$I = \int_{t_m}^t [P - P_m(z)]^2 \exp\left(-\frac{t-t'}{T_R}\right) dt'.$$

Рассматриваем случай  $\kappa \ll 1$ , когда время релаксации  $T_R$  велико. Интеграл  $I$  вычисляется по малому по сравнению с  $T_R$  временному промежутку. Поэтому формула (38) для волны разгрузки принимает вид

$$R = \chi P - \epsilon \chi^2 P^2 + \epsilon \chi^2 \kappa (P_m - P)^2 + O(\epsilon \kappa^2). \quad (39)$$

Эта же формула при  $\kappa = 0$  описывает и волну нагрузки.

Формула (39) позволяет получить графики  $R(P)$  для процессов нагрузки и различных вариан-

тов разгрузки в акустической среде. Рассмотрим сначала влияние релаксационного параметра  $\kappa$ . Проведенные выше расчеты показывают, что величина  $P_m$  весьма слабо зависит от  $\kappa$ .

Процессы нагрузки и различных вариантов разгрузки при воздействии на среду импульсного сигнала иллюстрируются на рис. 5. В отсутствие релаксации процессы нагрузки и разгрузки изображены соответственно кривой 1 и отрезком прямой 2. При  $0 < \kappa < 1$  процесс разгрузки на рис. 5 описывается кривой 3. При этом возникает остаточная деформация

$$R_{\text{res}, 0 < \kappa < 1} = \epsilon \chi^2 \kappa P_m^2 < \epsilon \chi^2 P_m^2 = R_{\text{res}, \kappa = 0}, \quad (40)$$

меньшая, чем при отсутствии релаксации. Отметим, что при  $\kappa > 1$  (малые времена релаксации) кривая 3 пройдет выше кривой 2.

Переходя к учету вязкости  $\Gamma$ , будем предполагать, что в этом случае остается справедливой формула (39). При этом величина максимального давления уменьшается:

$$P_{m, \Gamma > 0} < P_{m, \Gamma = 0}.$$

Соответственно уменьшается (кривая 4 на рис. 5) и величина остаточной деформации:

$$R_{\text{res}, \Gamma > 0} = \epsilon \chi^2 \kappa P_{m, \Gamma > 0}. \quad (41)$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически исследованы волны нагрузки и разгрузки в нелинейной релаксирующей и диссипативной среде.

Задача состояла в интегрировании полученных ранее в [4] эволюционных уравнений. Сложность задачи связана с ее нелинейностью и, главное, с присутствием в эволюционных уравнениях заранее неизвестного максимального давления  $P_m(z)$ , которое само должно быть определено в результате решения задачи. Кроме того, выражения для давления  $P(\theta, z)$  должны удовлетворять требованиям (25) и (3) для нагрузки и разгрузки соответственно.

Для решения указанных эволюционных уравнений использованы метод малоамплитудного приближения Дж. Стокса, новый асимптотический малодистантный (маловременной) подход [5], известное точное решение (23) уравнения Бюргера и некоторые специальные анзатцы, например, разложение (35). Для используемых асимптотических разложений найдены условия их применимости, см., например, (6) и (15). Построенные по разным схемам решения, относясь к разным временным промежуткам волнового процесса, дополняют друг друга.

Применение перечисленных методов позволило получить явные приближенные решения для волн нагрузки и разгрузки при различных типах

релаксирующих сред и различной величине параметра вязкости (диссипации). Найдены явные выражения для максимального давления  $P_m(z)$  и соответствующего времени  $\theta_m(z)$ , при котором производная  $\partial P/\partial \theta$  меняет знак.

Во всех рассмотренных случаях (рис. 1 – рис. 4) установлено, что при увеличении глубины проникновения в изучаемую среду достижение максимального давления  $P_m(z)$  происходит при больших временах  $\theta_m(z)$ . Исследовано взаимное влияние эффектов вязкости и релаксации. Оказывается, что с ростом вязкости главные части выражений  $P_m$  и  $\theta_m$  перестают зависеть от коэффициента релаксации.

В работе найдены также зависимости плотности от давления для различных типов сред и описано влияние типа среды на вид гистерезисной кривой и на величину остаточной деформации.

Автор благодарен члену-корреспонденту РАН О.В. Руденко за важные обсуждения и замечания в связи с работой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаров В.Е., Радостин А.В. Численное моделирование динамических гистерезисов для микроненормодных сред, с несовершенной упругостью и релаксацией. // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 514–520.
2. Ostrovsky L.A. Wave interaction in acoustical resonators with and without histeresis. // J. Acoust. Soc. Amer. 2004. V. 116. № 6. P. 3348–3353.
3. Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной диагностики. // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176. № 1. С. 77–95.
4. Руденко О.В., Робсман В.А. Нелинейные процессы в средах с акустическим гистерезисом и проблемы динамического взаимодействия свай и грунтового основания. // Акуст. журн. 2004. Т. 50. № 6. С. 825–832.
5. Молотков И.А. Аналитические методы в теории нелинейных волн. М.: Физматлит, 2003. 206 с.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

## Hysteresis in an Acoustic Medium with Relaxing Nonlinearity and Viscosity

I. A. Molotkov

*Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere, and Radio Wave Propagation, Russian Academy of Sciences, Troitsk, Moscow oblast, 142190 Russia*  
*e-mail: imolotkov@mtu-net.ru*

**Abstract**—The loading and unloading waves propagating in a nonlinear relaxing and dissipative medium of the consolidated soil type are investigated. Solutions describing the waves in such a medium are constructed with the use of the Stokes method and the small-distance asymptotic approach. Explicit approximate solutions are obtained for different values of the relaxation and viscosity parameters. The influence of the type of the medium on the shape of the hysteretic curves is described.