РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА, 2007, том 52, № 6, с. 1–8

РУБРИКА
РУБРИКА

УДК 537.86; 537.87

О НЕЛИНЕЙНЫХ ТУННЕЛЬНЫХ ЭФФЕКТАХ

© 2007 г. И. А. Молотков, А. Б. Маненков

Поступила в редакцию 03.05.2006 г.

Аналитически изучены эффекты туннелирования в случае нелинейного барьера постоянной высоты. Использован метод малоамплитудного приближения. Получены явные формулы для поля как внутри барьера, так и после его прохождения. Специально исследовано взаимодействие волны с низким барьером, непрозрачным для линейной среды и прозрачным для нелинейной. Проведен численный анализ, который позволил расширить амплитудный диапазон полученных результатов.

ВВЕДЕНИЕ

Эффекты туннелирования, хорошо известные по линейным задачам распространения волн, квантовой механики и оптики (см., например, [1, 2]), недостаточно изучены в случаях, когда потенциальный барьер конечной высоты представляет собой нелинейную среду. При этом нелинейная среда может быть описана в рамках различных моделей. По-видимому, простой и актуальной из них является классическая модель Клейна–Фока–Гордона (КФГ) [3–5]. Согласно Уизему, уравнение КФГ – замечательным примером волновой модели, сочетающей признаки как гиперболического (т.е. с существованием вещественных волновых фронтов), так и дисперсионного (т.е. с нетривиальным дисперсионным соотношением) движения.

Несмотря на простоту, модель КФГ описывает широкий круг важных физических явлений, таких как распространение волн в нелинейных средах с дисперсией в области низких частот (например, в плазме и ферритах) и в средах с неустойчивостями (лазерные усилители). Широко используется уравнение КФГ для анализа переходов Джозефсона между двумя сверхпроводниками [3]. Обсуждаемая модель позволяет также установить принципиально новые физические эффекты, возникающие при нелинейном туннелировании. Заметим, что исследуемая проблема тесно связана с задачами распространения мощного оптического излучения в новых композиционных материалах, изготовленных на основе имплантации наночастиц [6–8], а также в фотонных кристаллах [9].

Модель ГФГ и будем рассматривать далее. Это означает, что изучаемое волновое решение $u(x, t)$ предполагаем удовлетворяющим нелинейному уравнению КФГ

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + V(x)\Phi'(u) = 0. \qquad (1)$$

Здесь c – скорость распространения, множитель $V(x)$ описывает форму потенциального барьера, а учитывающий нелинейность среды потенциал $\Phi(u)$ имеет вид

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}u^2 + \sigma u^4. \qquad (2)$$

При $\sigma = 0$ уравнение (1) становится линейным, случай $\sigma = -\frac{1}{24}$ соответствует разложению по малой амплитуде уравнения sin-Гордона. Нелинейному туннелированию в рамках модели КФГ посвящены работы [10, 11]. Работа [10] связана с анализом эффектов в случае, когда производная от потенциала $\Phi'(u)$ близка к $\sin(u)$. Используемые нами далее способы исследования основаны на малоамплитудном приближении и отличны от примененных в [10]. В работе [11] также рассмотрено возмущение уравнения sin-Гордона, использованы численные методы решения. Отметим еще, что малость коэффициента σ в формуле (2) не предполагается.

Изучаемую задачу можно рассматривать в терминах не только потенциала, но и показателя преломления. Роль барьера при $0 < x < l$ в этом случае играет менее плотная (по сравнению со средами при $x < 0$ и $x > l$) среда, в которой показатель преломления меньше, чем в соседних средах. При этом должна быть реализована ситуация полного внутреннего отражения. Для обычных электродинамических или акустических сред это означает рассмотрение по крайней мере пространственно-двумерных задач. В данной работе для простоты ограничиваемся пространственно-одномерными задачами. Поэтому используемые далее подходы непосредственно пригодны в тех задачах распространения волн, в которых полное внутреннее отражение имеет место при нормальном падении.

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КФГ

Нелинейное уравнение (1) при потенциале (2) является достаточно трудным для аналитического исследования. В связи с этим сделаем следующие упрощающие предположения:

1) внутри барьера при $0 < x < l$

$$V(x) = V_0 = \text{const} > 0; \tag{3}$$

2) резонансные явления внутри барьера отсутствуют;

3) амплитуда падающей на барьер волны мала;

4) задача стационарная, т.е. зависимость от времени t имеет вид $\exp(-i\omega t)$, где ω – заданная частота.

Предположение 1) о постоянстве высоты барьера существенно упрощает анализ и в ряде случаев позволяет находить точные решения. Предположение 2) исключает существование внутрибарьерных собственных функций. Предположение 3) в последующем анализе позволяет использовать анзатц Стокса (см. [3, 12]). Предположение 4) приводит к определенному упрощению исходного уравнения (1).

В соответствии со сказанным выше подставляем

$$u = U(x)\exp(-i\omega t) + \text{к.с.} \tag{4}$$

в уравнение (1), в котором $\Phi(u)$ и $V(x)$ имеют вид (2) и (3). Далее считаем, что в рассматриваемой среде высшие гармоники подавляются; такая ситуация возникает, если амплитуда падающей волны уменьшается с течением времени (т.е. частота ω имеет малую отрицательную мнимую часть), а поглощение в среде растет с увеличением частоты. Получаем уравнение

$$c^2U_{xx} - (V_0 - \omega^2)U - \\ - 4\sigma V_0(3|U|^2U + U^3\exp(-2i\omega t)) + \text{к.с.} = 0.$$

В условиях стационарной задачи множитель $\exp(-2i\omega t)$ в соответствии со сказанным выше пренебрежимо мал. В итоге приходим к основному для дальнейшего изложения уравнению

$$U_{xx} = \kappa^2U + 12\sigma V|U|^2U. \tag{5}$$

Здесь $V \equiv V_0/c^2$,

$$\kappa^2 = V - \omega^2/c^2. \tag{6}$$

Случай $V \le k_0^2 = \omega^2/c^2$ или $\omega^2 \ge V_0$ соответствует надбарьерному распространению [1] и не рассматривается здесь. Уравнение (5) представляет собой нелинейное стационарное уравнение Шредингера. Равенство (6) определяет дисперсионное соотношение, характерное для модели КФГ.

Параметр σ в уравнении (5) может быть как положительным, так и отрицательным. В то же время рассматриваемый барьер может быть и достаточно низким, что соответствует случаю, когда величина κ^2 в (5) и (6) положительная, но малая. Сочетание отрицательного σ и низкого барьера даже при сделанном предположении о малости амплитуды может привести к изменению знака выражения

$$\kappa^2 - 12|\sigma|V|U|^2. \tag{7}$$

Случай отрицательной разности (7) исследуется отдельно в разд. 4. Сейчас же будем предполагать эту разность положительной.

Решая уравнение (5), используем упомянутый выше антзатц Стокса в видоизмененной форме. Однако не рассматриваем взаимодействие волны барьера с границами $x = 0$ и $x = l$, ширину барьера l здесь и далее предполагаем конечной. Ищем решение в виде

$$U = \exp(i\psi)(a\exp(-\kappa x) + \rho_1a^3\exp(-3\kappa x) + \\ + \rho_2a^5\exp(-5\kappa x) + \ldots), \tag{8}$$

где a – малый положительный параметр, имеющий смысл амплитуды волны, ρ_1 и ρ_2 – неизвестные коэффициенты. Фаза ψ не зависит от x, но может зависеть от амплитуды. Множитель $\exp(i\psi)$ при подстановке в (5) остается неопределенным, но будет найден в следующем разделе. Главное слагаемое в скобке (8) учитывает обычное для линейной задачи экспоненциальное затухание при углублении в барьер. Положительность этого слагаемого позволяет далее снять в уравнении (5) знак модуля.

Подстановка разложения (8) в уравнение (5) и обычное приравнивание коэффициентов при различных степенях a дает решение

$$U = a\exp(i\psi - \kappa x)\left[1 + \frac{3\sigma V}{2\kappa^2}a^2\exp(-2\kappa x) + \right. \\ \left. + \left(\frac{3\sigma V}{2\kappa^2}a^2\right)^2\exp(-4\kappa x) + \ldots\right] \tag{9}$$

внутри барьерной области. Формула (9) демонстрирует возбуждение поправочных слагаемых с кратными показателями. Нетрудно проверить, что и дальнейшие члены разложения (9) образуют геометрическую прогрессию, поэтому

$$U = a\exp(i\psi - \kappa x)\left[1 - \frac{3\sigma V}{2\kappa^2}a^2\exp(-2\kappa x)\right]^{-1}. \tag{10}$$

Из формулы (10) вытекает очевидное условие применимости

$$a < \sqrt{\frac{2\kappa^2}{3|\sigma|V}}. \tag{11}$$

используемого малоамплитудного приближения.

Нетрудно проверить, что при условии (11) формула (10) дает точное решение уравнения (5). Таким образом, в данном случае малоамплитудный подход явился подсказкой для построения точного решения.

2. СШИВАНИЕ РЕШЕНИЙ. ВОЛНА, ПРОШЕДШАЯ СКВОЗЬ БАРЬЕР

Решение (9) или (10) для барьерной области должно быть сшито при $x = 0$ и $x = l$ с волнами вне барьера. Начнем вычисления со сшивания при $x = 0$. В правой части (9) ограничимся двумя слагаемыми.

Из области $x < 0$ к барьеру подходит падающая волна

$$U_0 = A_0 \exp[i(k_0 x + \varphi_0)], \tag{12}$$

и возникает отраженная волна $\tilde{U}_0 = \tilde{A}_0 \exp[-i(k_0 x + \tilde{\varphi}_0)]$. Сумма этих двух волн непрерывно вместе с первой производной по x должна переходить в решение (9). Тогда получим систему уравнений

$$\begin{gathered} A_0 \exp(i\varphi_0) + \tilde{A}_0 \exp(-i\tilde{\varphi}_0) = \exp(i\psi)(a + \mu a^3), \\ \mu = \frac{3}{2}\frac{\sigma V}{\kappa^2}, \\ ik_0(A_0 \exp(i\varphi_0) - \tilde{A}_0 \exp(-i\tilde{\varphi}_0)) = \\ = -\kappa \exp(i\psi)(a + 3\mu a^3). \end{gathered} \tag{13}$$

Исключаем из уравнений (13) отраженную волну

$$\begin{gathered} 2k_0 A_0 \exp(i\varphi_0) = \\ = \exp(i\psi)[(k_0 + i\kappa)a + (k_0 + 3i\kappa)a^3]. \end{gathered} \tag{14}$$

В уравнении (14) характеристики A_0, k_0, φ_0 падающей волны считаем заданными, а параметры a и ψ – искомыми. Из этого уравнения в старшем порядке получаем

$$a = \frac{2k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}} A_0 + O(A_0^3), \quad \psi = \psi_0 + O(A_0^2),$$

$$\psi_0 \equiv \varphi_0 - \operatorname{arctg}\frac{\kappa}{k_0}.$$

Учет члена с a^3 в (14) позволяет найти более точные формулы:

$$a = \frac{2k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}} A_0 + pA_0^3, \quad \psi = \psi_0 + qA_0^2, \tag{15}$$

в которых

$$p = -\frac{8k_0^3 \mu (k_0^2 + 3\kappa^2)}{(k_0^2 + \kappa^2)^{5/2}}, \quad q = -\frac{8\kappa k_0^3 \mu}{(k_0^2 + \kappa^2)^2}.$$

Равенство (15), подставленное в (9), дает окончательное выражение для поля внутри барьера:

$$\begin{gathered} U = \exp(i\psi_0)\left\{\frac{2k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}} A_0 \exp(-\kappa x) + \right. \\ + \mu A_0^3 \left[\left(p + iq\frac{2k_0}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}}\right)\exp(-\kappa x) + \right. \\ \left.\left. + \frac{8k_0^3}{(k_0^2 + \kappa^2)^{3/2}} \exp(-3\kappa x)\right] + O(A_0^5)\right\}. \end{gathered} \tag{16}$$

Параметры $\tilde{A}_0$ и $\tilde{\varphi}_0$ отраженной волны определяются из системы уравнений (13):

$$\begin{gathered} \tilde{A} = A_0 + \frac{16\kappa k_0^3 (k_0 \sin\varphi_0 - \kappa\cos\varphi_0)}{(k_0^2 + \kappa^2)^{5/2}} \mu A_0^3, \\ \tilde{\varphi}_0 = -\varphi_0 + 2\operatorname{arctg}\frac{\kappa}{k_0} + \\ + \frac{16\kappa k_0^3 (k_0 \cos\varphi_0 + \kappa\sin\varphi_0)}{(k_0^2 + \kappa^2)^{5/2}} \mu A_0^2. \end{gathered} \tag{17}$$

Таким образом, амплитуда отраженной при $x = 0$ волны практически совпадает с амплитудой падающей. Амплитуда же волны, проникающей в барьер, может быть как больше, так и меньше амплитуды падающей волны.

Переходим к сшиванию волновых полей при $x = l$. Со стороны барьера на эту границу падает волна

$$U = \exp(i\psi)\{a\exp(-\kappa x) + \mu a^3 \exp(-3\kappa x)\},$$

назад в барьер уходит отраженная волна

$$\tilde{U} = \exp(i\tilde{\psi})\{\tilde{a}\exp[\kappa(x - l)] + \mu\tilde{a}^3 \exp[3\kappa(x - l)]\}.$$

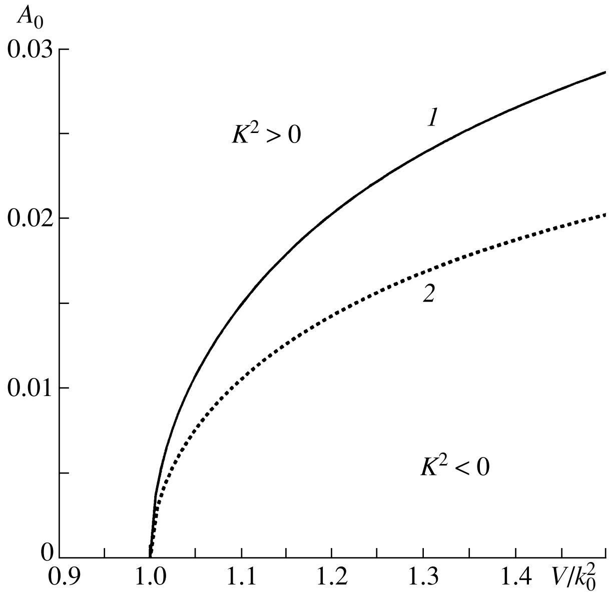

Рис. 1. Границы различных режимов поведения волн внутри барьера. Кривые *1* и *2* соответствуют $\sigma = -1/12$ и $-1/6$.

Сумма этих двух волн должна переходить в волну

$$U_1 = A_1 \exp[ik_1(x-l) + i\varphi_1], \tag{18}$$

уходящую в область $x > l$, k_1 – волновое число, соответствующее среде $x > l$. Снова получаем систему двух уравнений и исключаем из этой системы главную часть волны, ушедшей назад в барьер:

$$\begin{gathered} 2\kappa a \exp(i\psi - L)(1 + 2\mu a^2 \exp(-2L)) - \\ -2\mu\kappa\tilde{a}^3 \exp(i\psi) = (\kappa - ik_1)A_1 \exp(i\varphi_1), \end{gathered} \tag{19}$$

где $L = \kappa l$. Поскольку в уравнение (19) входят также параметры $\tilde{a}$, $\tilde{\psi}$ волны $\tilde{U}$, то из исходной системы уравнений сшивания при $x = l$ необходимо вывести второе следствие – результат исключения главной части волны U. Это следствие имеет вид

$$\begin{gathered} -2\mu\kappa a^3 \exp(-3L) + 2\kappa \exp(i\psi)\tilde{a}(1 + 2\mu\tilde{a}^2) = \\ = (\kappa + ik_1)A_1 \exp(i\varphi_1). \end{gathered}$$

Отсюда следует

$$\begin{gathered} \tilde{a} = \frac{\sqrt{\kappa^2 + k_1^2}}{2\kappa} A_1 + O(A_1^3), \\ \tilde{\psi} = \varphi_1 + \operatorname{arctg}\frac{k_1}{\kappa} + O(A_1^2). \end{gathered} \tag{20}$$

Использование последних формул позволяет преобразовать уравнение (19) в непосредственную связь A_1, φ_1 и a, ψ. В результате преобразований находим

$$\begin{gathered} A_1 = \\ = \frac{2\kappa a}{\sqrt{\kappa^2 + k_1^2}} \exp(-L)\left[1 + \frac{\mu(\kappa^2 + 3k_1^2)}{2(\kappa^2 + k_1^2)} a^2 \exp(-2L)\right], \end{gathered} \tag{21}$$

$$\varphi_1 = \psi + \operatorname{arctg}\frac{k_1}{\kappa} - \frac{2\kappa\mu k_1}{\kappa^2 + k_1^2} a^2 \exp(-2L). \tag{22}$$

После вывода формул (21) и (22) можно выразить амплитуду A_1 прошедшей барьер волны через исходную амплитуду A_0 (см. (14)):

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{4k_0\kappa}{\sqrt{k_0^2 + \kappa^2}\sqrt{\kappa^2 + k_1^2}} A_0 \exp(-L) - \\ - \frac{16\mu k_0^3 \kappa (k_0^2 + 3\kappa^2)}{(k_0^2 + \kappa^2)^{5/2}\sqrt{\kappa^2 + k_1^2}} A_0^3 \exp(-L) + O[A_0^3 \exp(-3L)]. \end{gathered} \tag{23}$$

Если $k_1 = k_0 = k$, что имеет место при совпадении окружающих барьер сред, то формула (23) упрощается:

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{4\kappa k}{k^2 + \kappa^2} A_0 \exp(-L) - \\ - \frac{16\mu k_\kappa^3 (k^2 + 3\kappa^2)}{(k^2 + \kappa^2)^3} A_0^3 \exp(-L) + O[A_0^3 \exp(-3L)]. \end{gathered} \tag{24}$$

3. НИЗКИЙ БАРЬЕР

Перейдем к случаю, когда коэффициент σ отрицателен и отрицательна разность (7). В этом случае, если амплитуда поля не слишком мала, уравнение (5) внутри барьера может иметь не монотонно убывающие, а осциллирующие решения. Эти решения, очевидно, могут отражаться от границ барьера, что существенно усложняет волновую картину. Будем изучать лишь некоторый типичный вариант появления осциллирующих решений внутри барьера и не будем рассматривать случаи, когда разность (7) проходит через нуль.

Сначала построим осциллирующее решение уравнения (5), еще не взаимодействовавшее с границами барьера. Такое решение ищем в виде

$$U = a \exp(i\psi + iKx), \tag{25}$$

где a, ψ и K подлежат определению. В результате подстановки (25) в уравнение (5) получаем

$$K^2 = \chi a^2 V - \kappa^2, \quad \chi \equiv 12|\sigma|. \tag{26}$$

При условии (26) формула (25) дает точное решение уравнения (5). Далее считаем, что

$$K^2 > 0. \tag{27}$$

Решение (25), (26) описывает волну, бегущую внутри барьера без затухания, и не учитывает взаимодействие волны с границами. Амплитуда a и фаза ψ в (25), (26) неизвестны и должны определяться из условий сшивания при $x = 0$.

Равенство $K^2 = 0$ определяет границу выполнения условия (27) и устанавливает связь между квадратом амплитуды a^2 и относительной высотой барьера V/k_0^2. О граничном равенстве $K^2 = 0$ можно говорить как о связи между заданными исходными величинами A_0^2 и V/k_0^2:

$$A_0^2 = \frac{1}{4\chi}\left(1 - \frac{1}{(V/k_0^2)}\right).$$

На рис. 1 изображена упомянутая граница существования двух режимов при двух значениях параметра χ. Кривая *1* построена для $\chi = 1$, кривая *2* – для $\chi = 2$.

Переходим к учету отражений от границ $x = 0$ и $x = l$. В результате двух отражений (по одному от каждой из этих границ) волна (25) приобретает дополнительный множитель

$$Q\exp(2iKl), \quad Q \equiv \frac{k_0 - K}{k_0 + K}\frac{k_1 - K}{k_1 + K} < 1. \tag{28}$$

Если бы число подобных отражений было неограниченно, то волна (25) вместо (28) приобрела бы дополнительный множитель $[1 - Q\exp(2iKl)]^{-1}$.

Отражения от границ ведут к уменьшению амплитуды волны (25). К такому уменьшению приводит уже первое отражение от границы $x = l$. Затем при отражении от границы $x = 0$ амплитуда a заменяется на амплитуду $aQ < a$. Для новой амплитуды условие (27) может оказаться уже не выполненным и осциллирующая внутри барьера волна превратится в волну затухающую. Конечно, такое преобразование в затухающую волну может произойти как после первого, так и после любого из последующих отражений.

Для определенности ограничимся случаем качественного преобразования барьерной волны после первого отражения от границы $x = 0$. Таким образом, считаем, что осциллирующая волна прошла путь $2l$ внутри барьера (туда и обратно) и превратилась в затухающую волну. Тогда расчет взаимодействий на границах дает следующие приближенные формулы:

$$a = 2A_0\left(1 - \frac{4K}{k_0}\sin^2 Kl\right), \quad \psi = \varphi_0, \tag{29}$$

$$A_1 = \frac{2K}{k_1}a, \quad \varphi_1 = \psi + Kl. \tag{30}$$

Невыписанные в (29) и (30) поправки имеют порядок A_0^2 или K/k_1 по сравнению с единицей. В этих формулах также предполагается, что барьер не является очень тонким, так что затухающая волна успевает существенно затухнуть на его ширине.

В итоге внутри барьера в старшем порядке имеем волну $U^+ = a\exp(iKx + i\psi)$, бегущую направо, и волну $U^- = -\left(1 - \frac{2K}{k_1}\right)a\exp[-iK(x - 2l) + i\psi]$, бегущую налево. Эти выражения с рассматриваемой точностью представляют собой решения уравнения (5). Нетрудно проверить, что с такой же степенью точности уравнению (5) удовлетворяет и сумма $U^+ + U^-$.

Для поля за барьером получаем

$$U_1 = A_1\exp[ik_1(x - l) + i\varphi_1] \quad \text{при} \quad x > l. \tag{31}$$

Комплексная амплитуда A_1 выражается через a и A_0 по формулам (29) и (30). Таким образом, при выполнении условия (27) нелинейный барьер оказывается прозрачным. Второе важное различие формул (23) и (31) для области за барьером заключается в том, что в случае низкого барьера появляется зависимость (26) барьерного волнового числа от амплитуды падающей волны.

4. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Дополним асимптотическое исследование задачи численным анализом. В этом случае не обязательно предполагать амплитуду A_0 падающей на барьер волны весьма малой величиной. Попрежнему рассматриваем барьер постоянной высоты V_0 (хотя переменный профиль $V(x)$ барьера можно исследовать аналогично), на который слева набегает волна (12).

Для численного решения уравнения (5), не связанного с малоамплитудным приближением, целесообразно использовать вариант метода пристрелки (стрельбы) [13, 14]. Более простой оказывается ситуация вблизи границы $x = l$, поскольку в окрестности $x = 0$ приходится иметь дело как с падающей, так и с отраженной волной. Поэтому введем вспомогательный параметр B, представляющий собой некоторое возможное значение амплитуды $U(x)$ при $x = l$. В силу непрерывности при $x = l$ поля $U(x)$ вместе с первой производной по x и условия излучения при $x > l$ имеем

$$U(l) = B\exp(i\varphi_1), \quad U'(l) = ik_1B\exp(i\varphi_1). \tag{32}$$

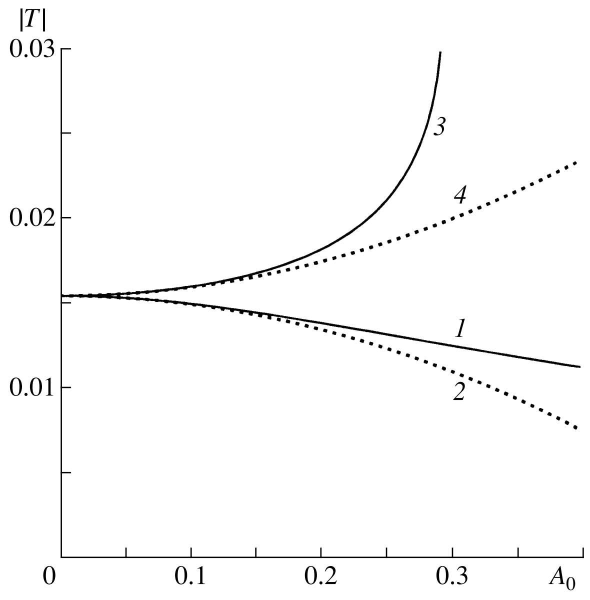

Рис. 2. Зависимость модуля коэффициента прохождения волны от ее амплитуды для барьера с параметрами $V/k_0 = 1.21$, $k_0l = 10$. Кривые *1*, *2* и *3*, 4 соответствуют $\sigma = 1/12$ и $-1/12$.

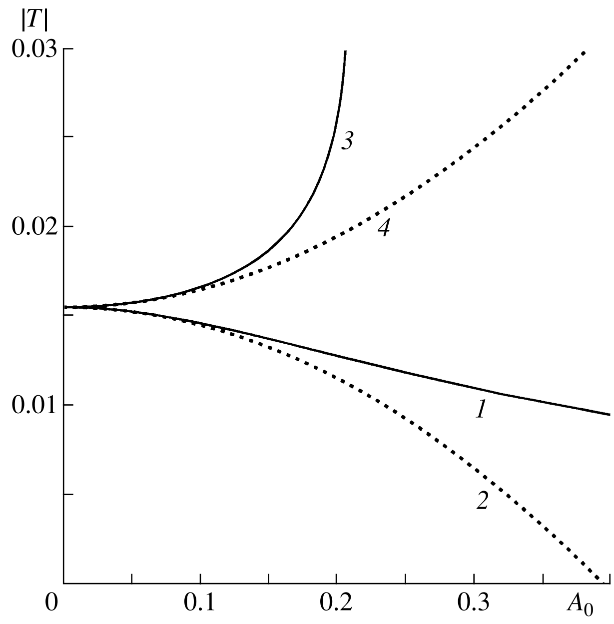

Рис. 3. Зависимость модуля коэффициента прохождения волны от ее амплитуды для барьера с параметрами $V/k_0 = 1.21$, $k_0l = 10$. Кривые *1*, *2* и *3*, *4* соответствуют $\sigma = 1/6$ и $-1/6$.

Уравнение (5) и условия (32) определяют задачу Коши, которую будем интегрировать в обратном направлении, т.е. от точки $x = l$ к точке $x = 0$. При выбранном значении B находим численно $U(0)$, $U'(0)$ и, следовательно, падающую волну

$$A_0\exp(i\varphi_0) = \frac{1}{2}[U(0) + U'(0)/ik_0].$$

В результате устанавливаем связь

$$A_0 = F(B) \tag{33}$$

между амплитудами волны, прошедшей барьер, и волны, падающей на него, в некотором интервале значений параметра B.

Далее в уравнении (33) считаем амплитуду A_0 заданной и находим численно соответствующее ей значение параметра $B = A_1$. Описанная схема позволяет найти все физические характеристики задачи, включая поле внутри барьера и комплексный коэффициент прохождения

$$T = (A_1/A_0)\exp[i(\varphi_1 - \varphi_0)].$$

При больших значениях параметра κl рассматриваемая задача для уравнения (5) близка к так называемому классу жестких задач [5, 15]. Многие стандартные алгоритмы (например, основанные на формулах Рунге–Кутты) неприменимы к таким задачам из-за возникновения неустойчивости при их решении и сильного влияния ошибок округления. Для интегрирования уравнения (5) использовался модифицированный метод Гира [16]. Описанный выше подход, основанный на интегрировании уравнения (5) в обратном направлении, при котором в режиме туннелирования поле растет, также увеличивает устойчивость вычислений. Отметим также, что при $\lambda l \gg 10$ для повышения устойчивости расчетов можно преобразовать уравнение (5), применяя замену переменных, которая часто используется в методе Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим конкретные итоги вычислений. Прежде всего сравним результаты расчетов численным методом и методом, описанным в разд. 3 и 4. Для простоты далее считаем, что среды слева и справа от барьера одинаковы, т.е. волновые числа в них равны ($k_0 = k_1$).

Рассмотрим случаи затухания внутри барьера. На рис. 2 представлен результат расчета модуля коэффициента прохождения $|T|$ волны сквозь барьер при $k_0 l = 10$, $V/k_0 = 1.21$. Кривые *1* и *3* построены численно при значениях коэффициента нелинейности $\sigma = 1/12$ и $\sigma = -1/12$ соответственно. Кривые *2* и *4* рассчитаны по формуле (23) при тех же значениях σ. Видно, что результаты двух способов расчета при $A_0 < 0.15$ совпадают с графической точностью.

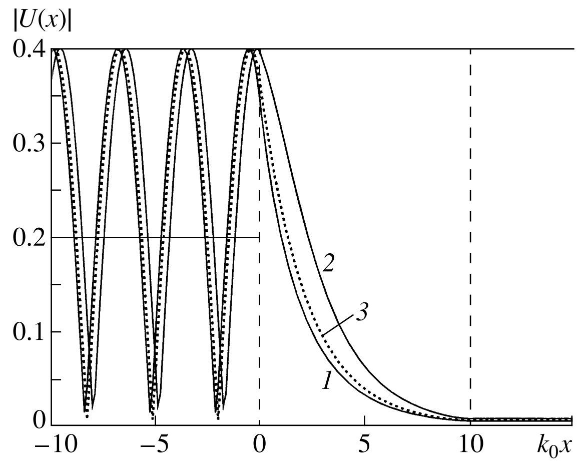

Рис. 4. Модуль волнового поля для барьера с параметрами $V/k_0 = 1.21$, $k_0l = 10$. Кривые *1*, *2* и *3* соответствуют $\sigma = 1/6$, $-1/6$ и 0.

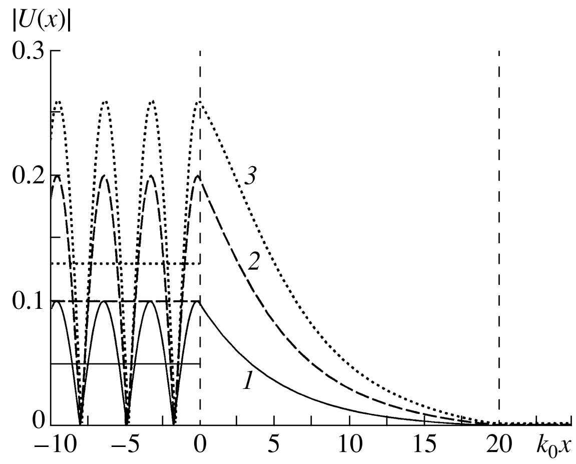

Рис. 5. Модуль волнового поля для барьера с параметрами $V/k_0 = 1.04$, $k_0l = 20$. Кривые *1*, *2* и *3* соответствуют амплитудам $A_0 = 0.05$, -0.1 и 0.13 (затухающий режим внутри барьера).

Рис. 3 иллюстрирует, как изменяются графики $|T(A_0)|$ при увеличении по сравнению с рис. 2 коэффициентов нелинейности σ. Кривые *1* и *2* соответствуют случаю $\sigma = 1/6$, а кривые *3* и *4* – случаю $\sigma = -1/6$. Остальные параметры задачи те же, что и на рис. 2. Соответствие кривых и методик расчета такое же, как и на рис. 2. Из рис. 3 видно, что при увеличении $|\sigma|$ влияние нелинейного члена в уравнении (5) на зависимость $|T(A_0)|$ выражено сильнее. Заметим также, что при более сильной нелинейности слегка сужается интервал амплитуд A_0, в котором результаты расчетов двумя методами совпадают.

На рис. 4 приведено распределение амплитуды $|U(x)|$ при нескольких значениях коэффициента σ. Параметры задачи следующие: $k_0l = 10$, $V/k_0 = 1.21$ и $A_0 = 0.2$. Кривые *1* и *2* рассчитаны численно при значениях $\sigma = 1/6$ и $\sigma = -1/6$ соответственно. На этом же рисунке для сравнения показано распределение амплитуды в линейной задаче (кривая *3*), т.е. при $\sigma = 0$. Для того чтобы показать различие между нелинейными и линейными задачами, параметр σ выбран достаточно большим по модулю. Горизонтальные линии представляют модули поля падающей и прошедшей волн, а вертикальные штриховые линии определяют границы барьера.

Опишем теперь результаты расчета для случая низкого барьера. Считаем, что $k_0 l = 20$, $V/k_0 = 1.04$ и $\sigma = -1/12$. По сравнению с предыдущими случаями длина барьера увеличена, чтобы более детально показать поведение решений. Все кривые на рис. 5 и 6 рассчитаны численно. На рис. 5 приведены графики $|U(x)|$, когда амплитуды падающих на барьер волн равны $A_0 = 0.05$, 0.1 и 0.13 (кривые *1*, *2* и *3* соответственно). Как и на рис. 4, горизонтальными линиями показаны распределения падающих волн, а вертикальными – границы барьера. При всех значениях A_0 мы находимся ниже граничных кривых, показанных на рис. 1, т.е. в зоне затухания волны внутри барьера, когда $K_2 < 0$.

Рис. 6 иллюстрирует случай, когда амплитуда падающей волны такова, что мы находимся выше граничных кривых на рис. 1 и имеем дело с осцилляциями поля внутри барьера, когда $K_2 > 0$. Для этого рисунка амплитуды увеличены до значений $A_0 = 0.15$ и 0.2 (кривые *1* и *2* соответственно). При таких значениях A_0 волна проходит сквозь барьер с достаточно большой амплитудой A_1 на выходе из барьера, т.е. происходит просветление нелинейного барьера.

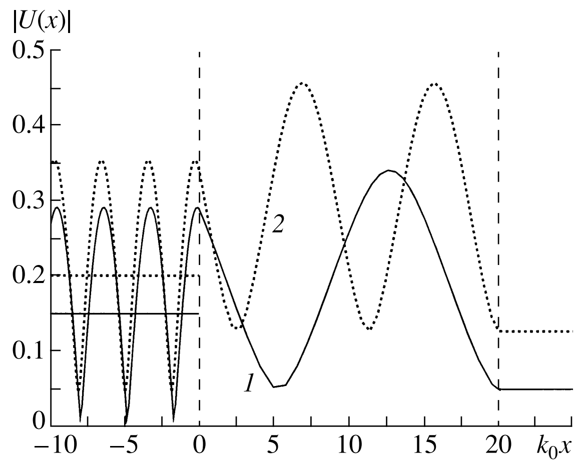

Рис. 6. Модуль волнового поля для барьера с параметрами $V/k_0 = 1.04$, $k_0l = 20$. Кривые *1* и *2* соответствуют амплитудам $A_0 = 0.15$ и 0.2 (осциллирующий режим внутри барьера).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проанализированы туннельные эффекты, когда барьер постоянной высоты представляет собой хорошо известную в физике нелинейную среду Клейна–Фока–Гордона. В основе построения решений основного уравнения (5) лежит метод малоамплитудного приближения, восходящий к Дж. Стоксу. Этот метод позволил получить формулы (9), (23), (29)–(31). Для уравнения (5) найдены также точные решения (10) и (25).

В указанном приближении получены явные формулы, описывающие как волновой процесс внутри барьера, так и волну, прошедшую сквозь барьер. Для барьера общего типа найдены отличия в затухании, обусловленные нелинейностью барьерной среды.

Отдельно исследовано прохождение волны сквозь низкий барьер, непрозрачный в случае линейной среды и который может стать прозрачным в нелинейном случае. Получено условие (27) для физических параметров задачи, когда нелинейность барьера ведет к осцилляциям волнового поля внутри него и к его просветлению. В случае низкого нелинейного барьера установлен также новый физический эффект: зависимость (26) барьерного волнового числа от амплитуды падающей волны.

Полученные в работе численные результаты не только полностью согласуются с аналитическими формулами при малых амплитудах, но и позволяют установить характер изменения волновых полей и коэффициента прохождения барьера при увеличении амплитуды.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 05-02-16176 и 06-02-16805).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.М., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
2. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
4. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
5. *Молотков И.А., Вакуленко С.А.* Сосредоточенные нелинейные волны. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.
6. Metal-Polymer Nanocomposites / Eds. Nicolais L., Carotenuto G. Hoboken: J. Wiley, 2005.
7. *Степанов А.Л.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 2. С. 1.
8. *Виноградова О.П., Марухина М.С., Сидоров А.И.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. № 12. С. 79.
9. *Pearce G.I., Hedley T.D., Bird D.M.* // Phys. Rev. B. 2005. V. 7. № 19. P. 195108.
10. *Newell A.C.* // J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1126.
11. *Lomdahl P.S., Soerensen O.H., Christiansen O.L. et al.* // Phys. Rev. B. 1981. V. 24. № 12. P. 7460.
12. *Молотков И.А.* Аналитические методы в теории нелинейных волн. М.: Физматлит, 2003.
13. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982.
14. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. М.: Наука, 1994.
15. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Холла Дж., Уатта Дж. М.: Мир, 1979.
16. *Каханер Д., Маулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998.