

# Яркие и темные импульсы в оптических волокнах в окрестности длины волны нулевой дисперсии

И.А.Молотков, М.А.Бисярин

*Изучено влияние дисперсии третьего порядка на распространение коротких импульсов в оптических волокнах. Описано возникновение связанных нелинейных структур, состоящих из темных и ярких солитонов огибающей. Установлен интервал длин волн в окрестности длины волны нулевой дисперсии, в пределах которого воздействие дисперсии третьего порядка на процесс распространения импульса оказывается определяющим. Показано, что в этом случае формируется нелинейная структура в виде встроеного солитона.*

**Ключевые слова:** оптическое волокно, короткий оптический импульс, дисперсия, дисперсия третьего порядка, длина волны нулевой дисперсии, яркий солитон, темный солитон, встроеный солитон, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кортевега–де Фриза.

## 1. Введение

Естественный способ минимизации уширения импульсов, обусловленного групповой дисперсией, состоит в использовании длин волн, для которых групповая дисперсия близка к нулю. В связи с этим поведение оптических импульсов в окрестности длины волны  $\lambda_0$  нулевой групповой дисперсии (НГД) широко обсуждалось в литературе (см., напр., [1–8]), причем наибольшее внимание уделялось случаю аномальной дисперсии вещества световода. Однако если интенсивность излучения существенно ниже порога самофокусировки, то солитонный режим распространения в волокне возможен и при нормальной дисперсии среды [9]. Аналогичные вопросы для спиновых волн в магнетиках рассматривались в [10, 11].

Малость члена с групповой дисперсией заставляет при выводе уравнения для огибающей короткого импульса учитывать дисперсионный член следующего порядка. Соответствующее обобщенное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} k'' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6} k''' \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau^3} + \frac{1}{2} \frac{\omega_0 n_2}{c} |\Phi|^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

(обозначения стандартные) легко может быть приведено к безразмерной форме:

$$i \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ib \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 2|u|^2 u = 0. \quad (2)$$

В (2) будем полагать, что  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ . Неотрицательность коэффициента  $a$  соответствует средам с нормальной дисперсией. С другой стороны, принятый знак этого коэффициента обеспечивает отсутствие модуляционной неустойчивости [4].

Вблизи точки НГД  $\lambda = \lambda_0$  коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнении (2) малы. При этом между ними возможны различные соотношения. При переходе от размерного уравнения (1) к безразмерному (2) естественно возникает конкуренция величин  $a$  и  $b^{2/3}$ , в связи с чем в дальнейшем целесообразно выделить две характерные области:

$$a > b^{2/3}, \quad (3)$$

и

$$a < b^{2/3}. \quad (4)$$

Выполнение неравенства (3) или (4) зависит от степени близости длины волны  $\lambda$  к длине волны НГД  $\lambda_0$ . Используя оценки [1] и продолжая их, нетрудно показать, что для одномодового волокна величины  $a$  и  $b^{2/3}$  равны при  $\lambda \approx 0.55\lambda_0$ . В случае

$$\lambda < 0.55\lambda_0 \quad (5)$$

имеем дело с неравенством (3). При

$$0.55\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 \quad (6)$$

– с неравенством (4). Наконец, при  $\lambda > \lambda_0$  располагается не рассматриваемая нами зона аномальной дисперсии.

Решения уравнения (2) возможны не только для ярких, но и для темных солитонов. Влияние дисперсии третьего порядка и самообострения импульса на форму и параметры яркого солитона было исследовано в [12, 13].

Цель настоящей работы состоит в описании связанных нелинейных структур, для чего необходимо получить явные формулы для солитонов обоих типов в случае как (3), так и (4). Построение таких формул мы начнем с

М.А.Бисярин. Санкт-Петербургский государственный университет, Научно-исследовательский институт радиофизики, Россия, 198504 С.-Петербург, Петродворец; тел.: (812) 428 43 57; факс: (812) 428 72 89; e-mail: bisyarin@niirf.spbu.ru  
И.А.Молотков. Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн, Россия, 42190 Московская обл., Троицк; тел.: (095) 330 82 43, факс: (095) 334 01 24; e-mail: imolotkov@mtu-net.ru

рассмотрения неравенства (3), а затем – (4). Этот случай требует принципиально иного анализа, поскольку в области (6) возможны лишь малоамплитудные импульсы.

## 2. Яркий и темный импульсы при $a > b^{2/3}$

Ищем решение уравнения (2) в виде комбинации решений для яркого ( $v$ ) и темного ( $w$ ) солитонов

$$u = e^{-i\Phi}(v + iw) \quad (7)$$

с фазой

$$\Phi = ct - dx, \quad (8)$$

где  $c$  и  $d$  – постоянные. Предполагаем, что искомые вещественные функции  $v$  и  $w$  зависят не от  $x$  и  $t$  в отдельности, а лишь от их комбинации

$$X = \alpha t - \beta x, \quad (9)$$

которую естественно называть амплитудной фазой (АФ).

Далее мы ищем сосредоточенные (локализованные) решения для  $v$  и  $w$ . Сосредоточенность решений означает, что они отличны от констант лишь в малых окрестностях некоторых точек или кривых. В данном случае речь идет о сосредоточенности функций  $v$  и  $w$  по переменной (9) в окрестности точки  $X = 0$ .

Переходя в (2) к дифференцированию по  $X$  (далее обозначается штрихом) и подставляя (7), получаем вещественную систему уравнений

$$(a + 3bc)\alpha^2 v'' + (d - ac^2 - bc^3)v - \beta w' + (2ac + 3bc^2)\alpha w' - b\alpha^3 w''' - 2(v^2 + w^2)v = 0, \quad (10)$$

$$(a + 3bc)\alpha^2 w'' + (d - ac^2 - bc^3)w + \beta v' - (2ac + 3bc^2)\alpha v' + b\alpha^3 v''' - 2(v^2 + w^2)w = 0, \quad (11)$$

где  $a$  и  $b$  – малые параметры, удовлетворяющие условию (3). Мы стремимся получить нетривиальное решение системы (10), (11) и одновременно наиболее полно учесть как нелинейность, так и дисперсию второго и третьего порядков. Представим коэффициенты  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  в виде заранее не известных степеней малого параметра  $a$  и положим, что отношение  $v/w$  также пропорционально некоторой степени  $a$ . Сравнивая порядки отдельных членов уравнений (10), (11), нетрудно установить, что единственная непротиворечивая возможность при решении указанной системы состоит в том, что при  $a \rightarrow 0$

$$b \sim a^2, \quad v \sim wa^{1/2}, \quad \beta \sim a^{1/2}, \quad \alpha \sim a^{1/2}.$$

Тогда главные члены (11) образуют уравнение

$$w_0'' + 2w_0 - \frac{4}{d}w_0^3 = 0.$$

Оно имеет нечетное сосредоточенное решение

$$w_0 = \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \tanh X, \quad (12)$$

описывающее темный солитон.

Аналогично из уравнения (10) получаем

$$v_0 = \frac{3d}{4} \frac{b}{a^{3/2}} \frac{1}{\cosh^2 X}, \quad (13)$$

$$\alpha = \left(\frac{d}{2a}\right)^{1/2}, \quad \beta = \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \left(2ca^{1/2} + \frac{bd}{a^{3/2}}\right). \quad (14)$$

Формула (13) определяет вид яркого солитона.

Линеаризация уравнений (10) и (11) в окрестности найденных главных частей решений  $v_0$  и  $w_0$ ,

$$v = v_0 + av_1, \quad w = w_0 + aw_1,$$

приводит к паре линейных неоднородных уравнений для  $v_1$  и  $w_1$ . Из поправок  $v_1$  и  $w_1$  старшей является поправка  $w_1$ . Для нее получаем следующее уравнение:

$$w_1'' + \left(\frac{6}{\cosh^2 X} - 4\right)w_1 = \frac{2c^2}{d} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \tanh X + \left(\frac{6bc}{a^2} + \frac{9b^2d}{a^4}\right) \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \frac{\sinh X}{\cosh^3 X} - \frac{63b^2d}{4a^4} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \frac{\sinh X}{\cosh^5 X}. \quad (15)$$

Соответствующее (15) однородное уравнение имеет общее решение

$$w = c_1 \frac{1}{\cosh^2 X} + c_2 \left( \sinh 2X + 3 \tanh X + \frac{3X}{\cosh^2 X} \right),$$

в котором требованию сосредоточенности удовлетворяет лишь первое слагаемое. Поэтому для  $w_1$  получаем следующее уравнение:

$$w_1 = c_1 \frac{1}{\cosh^2 X} - \frac{c^2}{2d} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \tanh X - \left(\frac{c^2}{2d} + \frac{3bc}{2a^2} + \frac{9b^2d}{4a^4}\right) \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \frac{X}{\cosh^2 X} + \frac{21b^2d}{8a^4} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \frac{\sinh X}{\cosh^3 X}, \quad (16)$$

где  $c_1$  – произвольная постоянная.

Функция  $w_1$  имеет четную и нечетную по  $X$  части. Четная часть  $c_1 \cosh^{-2} X$  дает малую мнимую добавку к яркому импульсу, нечетная – определяет поправку к темному импульсу (12). Формулы (12) и (13) показывают, что в рассматриваемом случае (3) уровень возбуждения темного импульса в  $a^{3/2}/b$  раз выше такого же уровня для яркого импульса. Более точно отношение амплитуд яркого и темного солитонов при  $X = 0$  представляет собой некоторую функцию  $g(\lambda)$ , описывающую возбуждение примесного (яркого) солитона на фоне главного (темного). Используя формулы работы [1] для дисперсии второго и третьего порядков, нетрудно установить, что  $g(\lambda) = 0.74 \times (\lambda_0/\lambda - 1)^{-3/2}$ ; зависимость  $g(\lambda)$  представлена на рис.1. Движение обоих солитонов происходит синфазно с конечной фазовой скоростью. Скорость этих движений по амплитудной фазе гораздо выше и имеет порядок  $a^{-1}$ . Последнее следует из формулы

$$X = \left(\frac{d}{2a}\right)^{1/2} \left[ t - \left(2ca + \frac{bd}{a}\right)x \right],$$

вытекающей из (9) и (14).

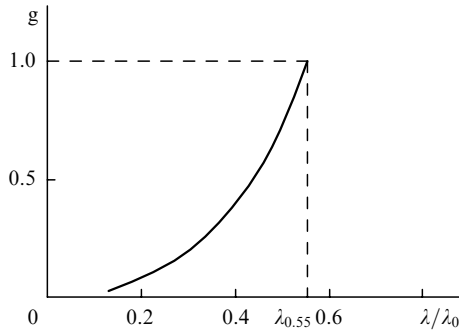


Рис.1. Коэффициент возбуждения яркого импульса на фоне темного в случае малой дисперсии третьего порядка.

В целом в рассматриваемом приближении построенное решение содержит произвольные коэффициенты  $c$  и  $d$  в (8) и последующих формулах, а также произвольную константу  $c_1$  в (16).

### 3. Малоамплитудное приближение

Из рассмотрения системы уравнений (10) и (11) при условии (4), т.е. в непосредственной близости к точке НГД, следует, что теперь нет возможности выделить сосредоточенные решения типа (12) и (13). Исследования показывают, что для изучаемых импульсов в зоне (6) характерны весьма малые амплитуды.

Далее используем следующую подстановку (анзатц):

$$u = [u_0 + U(x, t)] \exp[2iu_0^2 x + i\varphi(x, t)], \quad (17)$$

где  $u_0 = \text{const}$ ; ее вид соответствует точному решению НУШ. После подстановки (17) в (2) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} - 2a \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a(u_0 + U) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 3b \frac{\partial U}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \\ - b \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + 3b(u_0 + U) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ (u_0 + U) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a(u_0 + U) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - 4u_0^2 U \\ - 6u_0 U^2 - 2U^3 - 3b \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + b(u_0 + U) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^3 \\ - 3b \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - b(u_0 + U) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = 0. \end{aligned}$$

Следующий шаг связан с введением дополнительного малого амплитудного параметра  $\varepsilon$ . Введем новые независимые переменные

$$\tau = \varepsilon(t - Cx), \quad \xi = \varepsilon^3 x, \quad C = \text{const} \quad (18)$$

и будем отыскивать амплитуду и фазу в виде рядов

$$\begin{aligned} U &= U_0(\tau, \xi)\varepsilon^2 + U_1(\tau, \xi)\varepsilon^4 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0(\tau, \xi)\varepsilon + \varphi_1(\tau, \xi)\varepsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

Четность  $U$  и нечетность  $\varphi$  по  $\varepsilon$  легко подтверждаются при их подстановке в систему уравнений. В самом первом по  $\varepsilon$  порядке получаем

$$au_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} + CU_0 = 0,$$

$$C \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} + 4u_0 U_0 = 0.$$

Для совместности этой системы нужно положить

$$C = 2u_0 a^{1/2}. \quad (19)$$

При подстановке (19) в предыдущее уравнение получаем

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -\frac{1}{a^{1/2}} U_0. \quad (20)$$

Уравнения следующего приближения имеют вид

$$a^{1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + 2U_1 = \frac{1}{2u_0} \left[ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - 6U_0^2 + \left( \frac{2b}{a^{1/2}} + \frac{a}{u_0} \right) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} \right], \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \frac{1}{a^{1/2} u_0} \left[ \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \frac{12u_0 b}{a} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \right. \\ \left. + 6a^{1/2} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Продифференцировав (21) по  $\tau$  и используя (20), получим новое условие совместности для уравнений (21), (22). Это условие представляет собой уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ)

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi} + 6 \left( \frac{u_0 b}{a} + a^{1/2} \right) U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau} - \left( b + \frac{a^{3/2}}{4u_0} \right) \frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} = 0. \quad (23)$$

Выписывая точное солитонное решение уравнения (23), возвращаясь к старым переменным (18) и учитывая (19), находим, что

$$U_0 = -12\beta^2 \cosh^{-2} Q,$$

где

$$Q = \varepsilon \beta B \left[ t - 2u_0 a^{1/2} x + \frac{24}{a} (u_0 b + a^{3/2}) \beta^2 \varepsilon^2 x \right]; \quad (24)$$

$$B = \left( \frac{24u_0}{a} \frac{u_0 b + a^{3/2}}{4u_0 b + a^{3/2}} \right)^{1/2}; \quad (25)$$

$\beta$  – произвольный параметр, содержащийся в решении уравнения КдФ. Главная часть фазы  $\varphi_0$  находится согласно (20). Произвольный коэффициент  $\beta$  можно далее включить в малый параметр  $\varepsilon$ , который до сих пор также произволен. Наконец, разлагая в ряд фазовый множитель  $\exp(i\varphi_0 \varepsilon)$ , снова получаем структуру, подобную (7):

$$u = \exp(2iu_0^2 x)(v + iw), \quad (26)$$

$$v = u_0 \left[ 1 - \frac{12\varepsilon^2}{u_0 \cosh^2 Q} - \frac{288\varepsilon^2}{aB^2} \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2 Q} \right) + O(\varepsilon^3) \right], \quad (27)$$

$$w = \varepsilon u_0 \left[ \frac{24}{a^{1/2} B} \tanh Q + O(\varepsilon^3) \right]. \quad (28)$$

Формула (26) является суммой выражений для яркого и темного солитонов (27), (28). Главные их отличия от соответствующих формул для случая (5) состоят в том, что теперь яркий солитон представляет собой главное слагаемое, а темный – поправку к нему, и что яркий солитон (27) находится на пьедестале высотой  $u_0$  ( $u_0$  произвольно).

Формулы (26)–(28) не связаны с предположением о малости коэффициентов уравнения (2). Они справедливы при условии (4) вплоть до границы  $\lambda = 0.55\lambda_0$  области (6).

Наконец, при условии (4) формулы (24), (27) и (28) упрощаются:

$$Q = \varepsilon \left( \frac{6u_0}{a} \right)^{1/2} \left( t - 2u_0 a^{1/2} x + \frac{24u_0 b}{a} \varepsilon^2 x \right),$$

$$v = u_0 - \frac{12\varepsilon^2}{\cosh^2 Q} - 48\varepsilon^2 \tanh^2 Q,$$

$$w = 4\varepsilon(6u_0)^{1/2} \tanh Q.$$

Качественно зависимость амплитуд яркого и темного солитонов от фазовой переменной  $Q$  проиллюстрирована на рис.2.

Можно установить соотношения между параметром  $\varepsilon$  и коэффициентами уравнения (2). Так, в случае (4), вычисляя правые части уравнений (21) и (22) и оценивая поправку  $U_1$ , получаем

$$\varepsilon^2 \leq 0.1 \frac{a^{3/2}}{b}. \quad (29)$$

Неравенство (29) уточняет условия, при которых может наблюдаться процесс распространения встроенного солитона на пьедестале фиксированной величины.

#### 4. Заключение

Работа содержит аналитическое описание механизма влияния дисперсии третьего порядка на распространение короткого импульса в оптическом волокне. Динамика огибающей импульса описывается обобщенным НУШ (1), а рассматриваемый эффект выражается в изменении солитонного решения стандартного НУШ за счет члена с третьей производной. Основанные на результатах работы [1] оценки коэффициента при третьей производной показывают, что влиянием дисперсии третьего порядка не следует пренебрегать уже при длинах волн более 0.67 мкм, и по мере приближения к  $\lambda_0 = 1.27$  мкм дисперсия третьего порядка становится все более и более существенной.

В зависимости от соотношения дисперсий второго и третьего порядков существенно по-разному происходит формирование примесной структуры. В случае (3), когда длина волны еще значительно отличается от длины волны нулевой дисперсии (5) и дисперсия третьего порядка может трактоваться как возмущающий эффект, на фоне темного солитона стандартного НУШ возникают яркий импульс с амплитудой порядка  $b/a^{3/2}$ , а также дополнительные темные и яркие импульсы меньших амплитуд.

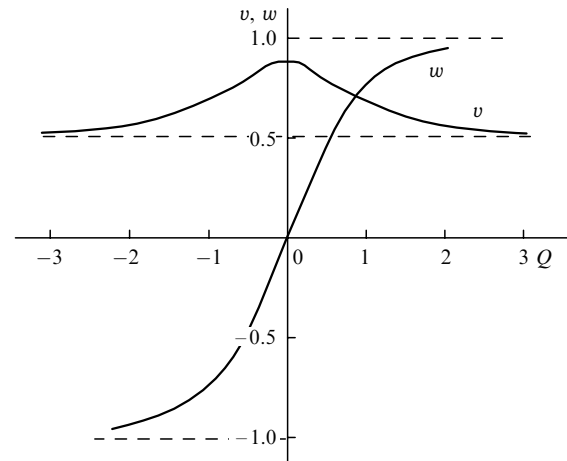


Рис.2. Яркий и темный импульсы в случае преобладания дисперсии третьего порядка. Вычисления проведены при  $u_0 = 1$ ,  $\varepsilon = 0.1$ .

Искажения стандартного импульса представляются в явном виде формулами (13) и (16).

Качественно иной вид имеет нелинейная динамика огибающей короткого импульса вблизи длины волны нулевой дисперсии в случае (4). Под преобладающим влиянием дисперсии третьего порядка формируется нелинейная структура в виде встроенного солитона [14]. Отличительной особенностью этой структуры является то, что яркий солитонный импульс распространяется на пьедестале конечной высоты и подчиняется уравнению Кортевега–де Фриза. Его аналитическое выражение дается формулами (26)–(28), в частности он имеет значительно более крутые фронты по сравнению с солитоном НУШ. И в этом случае эволюция импульса также представляет собой распространение связанных между собой темного и яркого солитонов.

Авторы благодарны С.А.Дарманыану за полезные обсуждения. Работа была поддержана РФФИ (проект № 02-02-16046).

1. Hasegawa A., Kodama Y. *Proc. IEEE Int. Soc. Opt. Eng.*, **69**, 1145 (1981)
2. Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика* (М.: Мир, 1996).
3. Kivshar Yu.S. *Opt. Lett.*, **17**, 1322 (1992).
4. Abdullaev F.K., Darmanyan S.A., Bishoff S., Christiansen P.L., Sorensen M.P. *Opt. Commun.*, **108**, 60 (1994).
5. Elgin J.N., Brabec T., Kelly S.M.J. *Opt. Commun.*, **114**, 321 (1995).
6. Afanasjev V.V., Kivshar Yu.S., Menyuk C.R. *Opt. Lett.*, **21**, 1975 (1996).
7. Kim W.-S., Moon H.-T. *Phys. Lett. A*, **266**, 364 (2000).
8. Shagalov A.G. *Phys. Lett. A*, **239**, 41 (1998).
9. Jain M., Tzoar N. *J. Appl. Phys.*, **49**, 4649 (1978).
10. Калиникоз Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. *ЖЭТФ*, **94**, 159 (1988).
11. Boardman A.D., Bontemps P., Wallis R.F., Xie K. *J. Magn. Magn. Mat.*, **210**, 403 (2002).
12. Молотков И.А., Повлсен Й.Х., Манаенкова Н.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **41**, 1117 (1998).
13. Молотков И.А., Вакуленко С.А., Бисярин М.А. *Нелинейные локализованные волновые процессы* (М.: Янус-К, 1999).
14. Karpman V.I., Rasmussen J.J., Shagalov A.G. *Phys. Rev. E*, **64**, 026614 (2001).